

FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES GENERALISEES

THIESE

présentée

à la FACULTE des SCIENCES de l'UNIVERSITE de NANCY

pour l'obtention

du DOCTORAT de SPECIALITE (Mathématiques - 3^e Cycle)

par

YVETTE THOUVENIN

soutenue le 1^{er} octobre 1958 devant la Commission
d'examen

JURY	{	J. DELSARTE	}	Président
		MM. M. HERVE		Examineurs
		F. BRUHAT		

FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES GENERALISEES

THIESE

présentée

à la FACULTE des SCIENCES de l'UNIVERSITE de NANCY

pour l'obtention

du DOCTORAT de SPECIALITE (Mathématiques - 3^e Cycle)

par

YVETTE THOUVENIN



soutenue le 1^{er} octobre 1958 devant la Commission
d'examen

JURY	{	J. DELSARTE	}	Président
		MM. M. HERVE		Examineurs
		F. BRUHAT		

UNIVERSITE de N A N C Y - FACULTE des SCIENCES

DOYEN : E. URION

Assesseur : M. ECHEVIN

Doyens honoraires : MM. HUSSON, CORNUBERT, DELSARTE

Professeurs honoraires : MM. DARMOIS E, GUTTON, CROZE, DARMOIS G, RAYBAUD, FALLOT, LAFFITE, LERAY, HUSSON, DONZELOT, JOLY, LAPORTE, EICHHORN, CAPELLE, GODEMENT, DUBREIL, SCHWARTZ, DIEUDONNE, De-MALLEMANN, LONGCHAMBON.

Maîtres de Conférences honoraires - MM. RAUX, LIENHART,

- P R O F E S S E U R S -

MM. CORNUBERT	Chimie organique	WAHL	Chim. org. ind.
CHEVALLIER	Physique	BARRIOL	Chimie théorique
URION	Chimie biol.	BIZETTE	Physique
DELSARTE	Analyse sup.	GUILLEN	Electronique
REMY	Zoologie	GIBERT	Génie chimique
ROUBAULT	Géologie	HERVE	Calcul diff. et int.
N...	Chimie minér.	LEGRAS	Mécanique Rat.
GUERIN	Chimie ind.	CHAPELLE	Physique
N...	Chimie Phys.él.	DAVID	Chimie biol.
VEILLET	Biologie anim.	BOLFA	Minéralogie
N...	Maths. appliquées	NICLAUSE	Chimie
ECHEVIN	Botanique	FAIVRE	Phys. appliqué

M A I T R E S de C O N F E R E N C E S

MM. WERNER	Botanique	DUVAL	Chimie	KERN	minér.
AUBRY	Chimie	SADRAN	Géochimie	WEPPE	minér.appl.
FRUHLING	Radiotechnique	CHAPON	Chim. biol.	BERNARD	Géologie
GAYET	Physiologie	HADNI	Physique	LERMUSIAUX	Phys. appl.
COMOLET	Mécani. phys.	ROIZEN	Physique	ARAGNOL	M.P.C.
MANGENOT	Phytopathologie	HILLY	Géol. de la Lorraine	<u>SECRETAIRE</u>	
LIONS	M.M.P.	MALAPRADE	Chimie		
GARNIER	Agronomie	REGNIER	Chimie min.	Monsieur	LAPOINTE
BRUHAT	Maths. géné.	LE GOFF	Génie chim.		
COPPENS	Radiogéologie				

C'est une profonde gratitude que j'exprime
au début de ce travail, à Monsieur le Doyen DELSARTE,
pour ses conseils éclairés et sa ferme direction.

Je salue aussi avec respect Messieurs les
Professeurs qui ont accepté de faire partie du Jury.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555808_0029

SUR UNE GÉNÉRALISATION DES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

Au colloque sur les équations aux dérivées partielles tenu à Louvain en 1953, Monsieur DELSARTE a exposé une généralisation de la théorie des fonctions de Bessel $J_M(\vec{u})$ en introduisant une matrice M . Il avait indiqué alors la possibilité d'obtenir par une méthode analogue des séries généralisant les fonctions hypergéométriques classiques. Nous nous proposons, dans les pages suivantes, d'étudier ces séries ; elles seront de la forme

$$\sum A_{\ell_1 \dots \ell_q} u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q} \quad \text{où } \ell_1 \dots \ell_q \text{ décrivent}$$
une partie convexe de Z^q et où le coefficient $A_{\ell_1 \dots \ell_q}$ est un quotient de produits de fonctions Γ . Les séries seront aussi solutions d'un système différentiel.

Etant donnés les matrices M de type (qp) , M' de type (qp') et les éléments $\vec{u} \in C^q$; $\vec{\alpha}, \vec{\gamma} \in C^p$; $\vec{\alpha}' \in C^{p'}$ nous définirons successivement les fonctions : $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$; $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$; $F_{MM'}(\vec{\alpha}'; \vec{\gamma}; \vec{u})$, chacune de ces fonctions généralisant la précédente ; nous étudierons leur convergence, leur propriété différentielle et intégrale.

I. - Fonction hypergéométrique simple -

Soit C^p l'espace vectoriel à p dimensions complexes et soit M une matrice entière de type (q, p) d'éléments m_{ji} entiers positifs $j = 1, 2, \dots, p$; $i = 1, 2, \dots, q$, primitive et de rang $q < p$; $M = \|m_{ji}\|$

Soit G le groupe compact des transformations linéaires diagonales :

$$x' = Ax \quad x'_j = a_j x_j \quad j = 1, 2, \dots, p$$

avec

$$|a_j| = 1$$

$$a_1^{m_{1i}} \cdot a_2^{m_{2i}} \cdot \dots \cdot a_p^{m_{pi}} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, q$$

Une relation telle que :

$$a_1^{k_1} \cdot \dots \cdot a_p^{k_p} = 1$$

entraîne $k_j = \sum_{i=1}^q m_{ji} \ell_i$ pour $j = 1, 2, \dots, p$, avec

$\ell_i \in \mathbb{Z}$ puisque M est de rang q et est primitive.

Considérons les q monômes suivants :

$$u_i = x_1^{m_{1i}} \cdot \dots \cdot x_p^{m_{pi}} \quad i = 1, 2, \dots, q$$

Ils sont algébriquement invariants et d'après ce qui précède ils forment une base non syzygitique pour les invariants polynomiaux de G .

1. - Définition de cette fonction -

Introduisons la fonction :

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)}{m!}x^m + \dots$$

pour $|x| < 1$.

Nous poserons dans la suite :

$$(1) \quad \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)}{m!} = (\alpha; m)$$

et

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha; m)}{m!} x^m \quad \text{avec } (\alpha; 0) = 1$$

Nous nous proposons d'étudier l'intégrale hypergéométrique suivante :

$$(2) \quad F = \int \dots \int_{a \in G} \prod_{j=1}^p \frac{1}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j}} da$$

da est la mesure de Haar sur G . da est l'élément de volume du groupe G - on suppose le volume total égal à l'unité $\int \dots \int_{a \in G} da = 1$

On montre facilement que la fonction F est un invariant du groupe G .

2) - Calcul de F .

$$\text{Remplaçons dans } F \frac{1}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j}} \text{ par } \sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j; k_j)}{k_j!} a_j^{k_j} x_j^{k_j}$$

$$\begin{aligned} F &= \int \dots \int_{a \in G} \prod_{j=1}^p \left(\sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j; k_j)}{k_j!} a_j^{k_j} x_j^{k_j} \right) da \\ &= \sum_{k_1 \dots k_p} \left(\prod_{j=1}^p \frac{(\alpha_j; k_j)}{k_j!} \right) \left[\int \dots \int_{a \in G} a_1^{k_1} \dots a_p^{k_p} da \right] x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p} \end{aligned}$$

Dans la sommation chaque k_j varie de 0 à ∞ , $a_1^{k_1} \dots a_p^{k_p}$ est un caractère de G, l'intégrale $\int_{a \in G} a_1^{k_1} \dots a_p^{k_p} da$ est nulle sauf lorsque le caractère est principal, dans ce dernier cas l'intégrale vaut 1. Le caractère $a_1^{k_1} \dots a_p^{k_p}$ est principal lorsque

$$k_j = \sum_{i=1}^q m_{ji} \ell_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, q.$$

$$\vec{k} = M\vec{\ell} \quad \vec{\ell} \in Z^q$$

Z^q est l'ensemble des points de R^q à coordonnées entières. Donc le point $\vec{k}$ ($k_1 \dots k_p$) décrit dans la sommation l'ensemble des points de coordonnées entières positives de l'image de Z^q par l'application $\vec{\ell} \longrightarrow M\vec{\ell}$. Nous noterons la somme par :

$$(3) \quad \sum^* = \sum_{\substack{\vec{\ell} \in Z^q \\ \vec{k} = M\vec{\ell} \in Z_+^p}}$$

Z_+^p étant l'ensemble des points de Z^p de coordonnées positives

$$F = \sum_{k_1 \dots k_p}^* \left(\prod_{j=1}^p \frac{(\alpha_j; k_j)}{k_j!} \right) x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p}$$

Et en remplaçant k_j par $\sum_{i=1}^q m_{ji} \ell_i$

$$F = \sum_{\ell_1 \dots \ell_q}^* \left(\prod_{j=1}^p \frac{(\alpha_j; m_{j1} \ell_1 + m_{j2} \ell_2 + \dots + m_{jq} \ell_q)}{\Gamma(m_{j1} \ell_1 + \dots + m_{jq} \ell_q + 1)} \right) u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

$$\text{avec : } u_i = x_1^{m_{1i}} \dots x_p^{m_{pi}}$$

Nous noterons cette série par $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$ où $\vec{\alpha}$ est un point de C^p et $\vec{u}$ un point de C^q . M est la matrice caractéristique.

Les séries hypergéométriques $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$ convergent dans le domaine de C^q défini par $|x_j| < 1 \quad j = 1, 2, \dots, p$

$$(4) \quad F_M(\vec{\alpha}; \vec{u}) = \sum_{\ell_1 \dots \ell_q}^* \left[\prod_{j=1}^p \frac{(\alpha_j; m_{j1} \ell_1 + \dots + m_{jq} \ell_q)}{(m_{j1} \ell_1 + \dots + m_{jq} \ell_q + 1)} \right] u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

3 - Passage à la fonction de Bessel $J_M(\vec{u})$

$$J_M(\vec{u}) = \int_{a \in G} \dots \int \exp \left[a_1 x_1 + \dots + a_p x_p \right] da$$

Rappelons le passage de la fonction $\frac{1}{(1-x)^\alpha}$ à la fonction exponentielle

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \frac{x}{\alpha})^\alpha} = e^x$$

Considérons

$$F_M(\vec{\alpha}; \vec{u}) = \int_{a \in G} \dots \int \prod_{j=1}^p \frac{1}{(1 - a_j x_j)^{\alpha_j}} da$$

Divisons les composantes x_j de x par $\alpha_j \quad j = 1, 2, \dots, p$,

alors les u_i sont divisés par $\alpha_1^{m_{1i}} \dots \alpha_p^{m_{pi}} \quad i = 1, 2, \dots, q$

Posons $\beta_i = \alpha_1^{m_{1i}} \dots \alpha_p^{m_{pi}}$

Alors diviser x_j par α_j pour $j = 1, 2, \dots, p$ revient à diviser

u_i par $\beta_i \quad i = 1, 2, \dots, q$

et :

$$F_M(\vec{\alpha}; \frac{\vec{u}}{\beta}) = \int_{a \in G} \dots \int \prod_{j=1}^p \frac{1}{(1 - \frac{a_j x_j}{\alpha_j})^{\alpha_j}} da$$

En passant à la limite

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} F_M(\vec{\alpha}; \frac{\vec{u}}{\beta}) &= \int_{a \in G} \cdots \int \prod_{j=1}^p (\exp a_j x_j) \cdot da \\ &= \int_{a \in G} \exp [a_1 x_1 + \dots + a_p x_p] da = J_M(\vec{u}) \end{aligned}$$

Donc

$$(5) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} F_M(\vec{\alpha}, \frac{\vec{u}}{\beta}) = J_M(\vec{u})$$

$$\text{avec } \beta_i = \alpha_1^{m_{1i}} \dots \alpha_p^{m_{pi}} \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

4) - Equation différentielle de $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$

Cette fonction $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$ ne dépend des x_j que par l'intermédiaire des u_i .

Or pour une fonction f ne dépendant des x_j que par l'intermédiaire des u_i nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^q \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ u_i &= x_1^{m_{1i}} \dots x_p^{m_{pi}} \end{aligned}$$

$$\text{et } x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^q m_{ji} u_i \frac{\partial f}{\partial u_i}$$

Nous posons :

$$(6) \quad \sigma_j(f) = x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^q m_{ji} u_i \frac{\partial f}{\partial u_i}$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \sigma_j(\sigma_j) &= x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \end{aligned}$$

$$\sigma_j (\sigma_j^{-1}) = x_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

Posons :

$$(7) \quad x_j^n = x_j^n \frac{\partial^n}{\partial x_j^n}$$

On voit facilement que :

$$(8) \quad x_j^n = \sigma_j (\sigma_j^{-1}) \dots (\sigma_j^{-n+1})$$

Donc lorsque f ne dépend que des u_j

$$x_1^{m_{1i}} x_2^{m_{2i}} \dots x_p^{m_{pi}} \frac{\partial^{m_{1i} + \dots + m_{pi}}}{\partial x_1^{m_{1i}} \dots \partial x_p^{m_{pi}}} f = \prod_{j=1}^p \sigma_j (\sigma_j^{-1}) \dots (\sigma_j^{-m_{ji}+1})$$

Appliquons cet opérateur que nous noterons D à $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$

$$D F_M(\vec{\alpha}; \vec{u}) = \int_{a \in G} \prod_{j=1}^p \frac{x_j^{m_{ji}} a_j^{m_{ji}} (\alpha_j; m_{ji})}{(1 - a_j x_j)^{\alpha_j + m_{ji}}} da$$

$$\text{puisque } x_j^{m_{ji}} \left[\frac{1}{(1 - a_j x_j)^{\alpha_j}} \right] = x_j^{m_{ji}} \frac{(\alpha_j; m_{ji}) a_j^{m_{ji}}}{(1 - a_j x_j)^{\alpha_j + m_{ji}}}$$

$$\text{Donc : } D F_M(\vec{\alpha}; \vec{u}) = u_i \int_{a \in G} \prod_{j=1}^p \frac{(\alpha_j; m_{ji}) a_j^{m_{ji}}}{(1 - a_j x_j)^{\alpha_j + m_{ji}}} da$$

Comme par définition de G :

$$a_1^{m_{1i}} a_2^{m_{2i}} \dots a_p^{m_{pi}} = 1$$

$$D F_M(\vec{\alpha}; \vec{u}) = u_i \int_{a \in G} \prod_{j=1}^p \frac{(\alpha_j; m_{ji})}{(1 - a_j x_j)^{\alpha_j + m_{ji}}} da$$

Appliquons maintenant l'opérateur $\sigma_j = x_j$ à $\frac{1}{(1 - a_j x_j)^{\alpha_j}}$

$$\begin{aligned} \sigma_j \left[\frac{1}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j}} \right] &= x_j a_j \alpha_j \frac{1}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j+1}} \\ &= \alpha_j \frac{a_j x_j - 1 + 1}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j+1}} \end{aligned}$$

$$\sigma_j \left[\frac{1}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j}} \right] = - \frac{\alpha_j}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j}} + \frac{\alpha_j}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j+1}}$$

$$(\sigma_j + \alpha_j) \left[\frac{1}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j}} \right] = \frac{\alpha_j}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j+1}}$$

$$(\sigma_j + \alpha_j + 1) (\sigma_j + \alpha_j) \left[\frac{1}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j}} \right] = \frac{\alpha_j (\alpha_j + 1)}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j+2}}$$

$$\text{et } (\sigma_j + \alpha_j + m_{ji} - 1) \dots (\sigma_j + \alpha_j + 1) (\sigma_j + \alpha_j) \left[\frac{1}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j}} \right] = \frac{(\alpha_j; m_{ji})}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j + m_{ji}}}$$

$$\text{Posons } Y_j = (\sigma_j + \alpha_j + m_{ji} - 1) \dots (\sigma_j + \alpha_j + 1) (\sigma_j + \alpha_j)$$

Appliquons l'opérateur $\prod_{j=1}^p Y_j$ à la fonction $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$

$$\left(\prod_{j=1}^p Y_j \right) F_M(\vec{\alpha}; \vec{u}) = \int_{a \in G} \dots \int \prod_{j=1}^p \frac{(\alpha_j; m_{ji})}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j + m_{ji}}}$$

Nous voyons que la fonction $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$ annule l'opérateur différentiel

$$\Delta_i = D - u_i \prod_{j=1}^p Y_j$$

$$(9) \quad \Delta_i \cong \prod_{j=1}^p \sigma_j (\sigma_j - 1) \dots (\sigma_j - m_{ji} + 1) - u_i \prod_{j=1}^p (\sigma_j + \alpha_j + m_{ji} - 1) \dots$$

$$\dots (\sigma_j + \alpha_j)$$

i pouvant prendre les valeurs 1, 2, ..., q nous obtenons q opérateurs différentiels annulés par $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$.

Remarquons que nous pouvons permuer les X_j et les constantes, un simple calcul montre alors que Δ_i peut encore s'écrire :

$$\Delta_i = \prod_{j=1}^p X_j^{m_{ji}} - u_i \prod_{j=1}^p \left(\sum_{k=0}^{m_{ji}} \binom{m_{ji}}{k} (\alpha_j + k; m_{ji} - k) X_j^k \right)$$

II - Fonction. complète .

1) - Définition

Nous avons vu que la fonction $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$ était égale à la série suivante :

$$F_M(\vec{\alpha}; \vec{u}) = \sum_{\ell_1 \dots \ell_q}^* \prod_{j=1}^p \frac{(\alpha_j; m_{j1} \ell_1 + \dots + m_{jq} \ell_q)}{\Gamma(m_{j1} \ell_1 + \dots + m_{jq} \ell_q + 1)} u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q} \quad (\text{formule 4})$$

où $\vec{\alpha}$ est un point de C^p et $\vec{u}$ un point de C^q et où la matrice caractéristique $M = \|m_{ji}\|$, $m_{ji} > 0$ définit une transformation linéaire $\vec{x} = M\vec{y}$ de C^q dans C^p (où de Z^q dans Z^p)

Posons $n_j = m_{j1} \ell_1 + \dots + m_{jq} \ell_q$, n_j est la $j^{\text{ème}}$ composante de $M\vec{\ell}$

n_j étant dans Z^q , $\Gamma(n_j + 1) = (1; n_j)$

Posons

$$(10) \quad \underline{\{\vec{\alpha}; \vec{n}\}} = \prod_{j=1}^p (\alpha_j; n_j) = \prod_{j=1}^p \frac{\Gamma(\alpha_j + n_j)}{\Gamma(\alpha_j)}$$

Alors $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$ s'écrit :

$$(11) \quad F_M(\vec{\alpha}; \vec{u}) = \sum_{\vec{\ell} \in Z^q}^* \frac{[\vec{\alpha}; M\vec{\ell}]}{[\vec{1}; M\vec{\ell}]} u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

ℓ décrivant l'ensemble des points de Z^q tels que $M\vec{\ell}$ soient de composantes ≥ 0 .

et $\vec{1}$ désigne le point unité de Z^q .

Introduisons un autre point $\vec{\gamma}(\gamma_1 \dots \gamma_p)$ de C^p et la série

$$(12) \quad F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u}) = \sum_{\vec{\ell} \in Z^q} \frac{[\vec{\alpha}; M\vec{\ell}]}{[\vec{\gamma}; M\vec{\ell}]} u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

Cette série généralise la série $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$.

Nous étudierons un peu plus loin la convergence de cette nouvelle série $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$

Notons encore que dans cette série la sommation est étendue à tous les éléments de Z^q .

Montrons que formellement $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$ est solution d'un système de q équations différentielles.

2 - Propriété différentielle de $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$

Nous avons vu précédemment que si une fonction f ne dépend des x_j que par l'intermédiaire des u_i , nous avons :

$$\sigma_j(f) = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (f) = \sum_{i=1}^q m_{ji} u_i \frac{\partial}{\partial u_i} (f)$$

Appliquons σ_j à $u_1^{\ell_1} \cdot u_2^{\ell_2} \dots u_q^{\ell_q}$.

$$\begin{aligned} \sigma_j(u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}) &= \left(\sum_{i=1}^q m_{ji} \ell_i \right) u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q} \\ &= n_j u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q} \end{aligned}$$

$n_j = \sum_{i=1}^q m_{ji} \ell_i$ étant la $j^{\text{ème}}$ composante de $M\vec{\ell}$ et par suite :

$$(\sigma_j + \alpha_j) (u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}) = (n_j + \alpha_j) u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

$$\text{et } (\sigma_j + \alpha_j) (\sigma_j + \alpha_j + 1) \dots (\sigma_j + \alpha_j + m_{ji} - 1) (u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}) =$$

$$(n_j + \alpha_j)(n_j + \alpha_j + 1) \dots (n_j + \alpha_j + m_{ji} - 1) u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}.$$

Si nous posons $Y_j = (\sigma_j + \alpha_j) (\sigma_j + \alpha_j + 1) \dots (\sigma_j + \alpha_j + m_{ji} - 1)$

nous obtenons :

$$Y_j(u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}) = (n_j + \alpha_j; m_{ji}) u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \left[\prod_{j=1}^p Y_j \right] u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q} &= \prod_{j=1}^p (n_j + \alpha_j; m_{ji}) u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q} \\ &= \left[\vec{M\vec{\ell}} + \vec{\alpha}; \vec{M\vec{I}_i} \right] u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q} \end{aligned}$$

où $\vec{I}_i$ est le vecteur unitaire coordonnée de rang i de Z^q .

Appliquons maintenant cet opérateur au terme général A de la série $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$.

$$\begin{aligned} \left[\prod_{j=1}^p Y_j \right] A &= \frac{[\vec{\alpha}; \vec{M\vec{\ell}}] [\vec{M\vec{\ell}} + \vec{\alpha}; \vec{M\vec{I}_i}]}{[\vec{\gamma}; \vec{M\vec{\ell}}]} u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q} \\ \text{Mais } [\vec{\alpha} + \vec{M\vec{\ell}}; \vec{M\vec{I}_i}] &= \frac{[\vec{\alpha}; \vec{M\vec{\ell}} + \vec{M\vec{I}_i}]}{[\vec{\alpha}; \vec{M\vec{\ell}}]} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \left[\prod_{j=1}^p Y_j \right] A = \frac{[\vec{\alpha}; \vec{M\vec{\ell}} + \vec{M\vec{I}_i}]}{[\vec{\gamma}; \vec{M\vec{\ell}}]} u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

$$\text{De même posons } Z_j = [\sigma_j + \gamma_j^{-1}] [\sigma_j + \gamma_j^{-2}] \dots [\sigma_j + \gamma_j^{-m_{ji}}]$$

$$\text{On a : } Z_j (u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}) = (n_j + \gamma_j^{-m_{ji}}; m_{ji}) u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

$$\text{et } \left[\prod_{j=1}^p Z_j \right] (u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}) = [\vec{\gamma} + M(\vec{\ell} - \vec{I}_i); \vec{M\vec{I}_i}] u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

En appliquant cet opérateur au terme général A de la série $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$

$$\left[\prod_{j=1}^p Z_j \right] A = \frac{[\vec{\alpha}; \vec{M\vec{\ell}}] [\vec{\gamma} + M(\vec{\ell} - \vec{I}_i); \vec{M\vec{I}_i}]}{[\vec{\gamma}; \vec{M\vec{\ell}}]} u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

$$\text{Mais } [\vec{\gamma} + M(\vec{\ell} - \vec{I}_i); \vec{M\vec{I}_i}] = \frac{[\vec{\gamma}; M(\vec{\ell} - \vec{I}_i) + \vec{M\vec{I}_i}]}{[\vec{\gamma}; M(\vec{\ell} - \vec{I}_i)]} = \frac{[\vec{\gamma}; \vec{M\vec{\ell}}]}{[\vec{\gamma}; M(\vec{\ell} - \vec{I}_i)]}$$

$$\text{Et } \left[\prod_{j=1}^p Z_j \right] A = \frac{[\vec{\alpha}; \vec{M\vec{\ell}}]}{[\vec{\gamma}; M(\vec{\ell} - \vec{I}_i)]} u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

Si dans ce résultat nous changeons $\vec{\ell}$ en $\vec{\ell} + \vec{I}_i$, nous retrouvons

$$\frac{(\vec{\alpha}; M(\vec{\ell} + \vec{I}_i))}{(\vec{\gamma}; M\vec{\ell})} u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q} \text{ multiplié par } u_i.$$

Le changement $\vec{\ell}$ en $\vec{\ell} + \vec{I}_i$ est un décalage d'une unité dans le sens > 0 , parallèle au $i^{\text{ème}}$ axe de coordonnées de Z^q . L'application des opérateurs $u_i \prod_{j=1}^p Y_j$ et $\prod_{j=1}^p Z_j$ au développement formel de $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$ fournit le même développement formel, puisque la sommation est étendue à tous les éléments $\vec{\ell}$ de Z^q .

Donc la série formelle est solution du système suivant :

$$(13) \quad \left[\prod_{j=1}^p Z_j - u_i \prod_{j=1}^p Y_j \right] f = 0 \quad i = 1, 2, \dots, q$$

avec $Z_j = \begin{bmatrix} \sigma_j + \gamma_j - 1 \\ \sigma_j + \gamma_j - 2 \\ \dots \\ \sigma_j + \gamma_j - m_{ji} \end{bmatrix}$
 et $Y_j = \begin{bmatrix} \sigma_j + \alpha_j \\ \sigma_j + \alpha_{j+1} \\ \dots \\ \sigma_j + \alpha_j + m_{ji} - 1 \end{bmatrix}$

C'est un système de q équations linéaires, aux dérivées partielles et à une seule fonction inconnue, notons le S_γ .

Remarquons que pour $\vec{\gamma} = \vec{1}$ nous trouvons le système d'équations (9) dont est solution $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$.

Voyons si le système différentiel S_γ possède d'autres solutions de la forme :

$$f = \sum_{\vec{r}} A(\vec{r}) u_1^{r_1} \dots u_q^{r_q},$$

où les $\vec{r}$ décrivent dans C^q une classe modulo Z^q .

$\vec{r} = (r_1, \dots, r_q)$. Nous écrirons symboliquement :

$$(14) \quad u_1^{r_1} \dots u_q^{r_q} = u^{\vec{r}}$$

$$\text{Nous avons aussi : } f = \sum_{\vec{r}} A(\vec{r}) x^{\vec{r}}$$

$$(M\vec{r} = \vec{s} \implies x^{\vec{r}} = x_1^{s_1} \dots x_p^{s_p})$$

En écrivant que f est solution de S_γ nous trouvons que :

$$A(\vec{r} + \vec{I}_i) = \frac{\{\vec{\alpha} + M\vec{r}; \vec{M}\vec{I}_i\}}{\{\vec{\gamma} + M\vec{r}; \vec{M}\vec{I}_i\}} A(\vec{r})$$

Pour $\vec{x} \in \mathbb{C}^p$, posons :

$$(15) \quad \Gamma(\vec{x}) = \prod_{j=1}^p \Gamma(x_j)$$

$$\text{Soit } \vec{n} = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$$

$$\Gamma(x_j + n_j) = \{x_j; n_j\} \cdot \Gamma(x_j)$$

$$\text{et } \Gamma(\vec{x} + \vec{n}) = \Gamma(\vec{x}) \cdot \{\vec{x}; \vec{n}\}$$

Introduisons :

$$B(\vec{r}) = B(r_1 \dots r_q) = \frac{\Gamma(\vec{\alpha} + M\vec{r})}{\Gamma(\vec{\gamma} + M\vec{r})}$$

$$\begin{aligned} B(\vec{r} + \vec{I}_i) &= \frac{\Gamma(\vec{\alpha} + M\vec{r} + \vec{M}\vec{I}_i)}{\Gamma(\vec{\gamma} + M\vec{r} + \vec{M}\vec{I}_i)} = \frac{\Gamma(\vec{\alpha} + M\vec{r}) \cdot \{\vec{\alpha} + M\vec{r}; \vec{M}\vec{I}_i\}}{\Gamma(\vec{\gamma} + M\vec{r}) \cdot \{\vec{\gamma} + M\vec{r}; \vec{M}\vec{I}_i\}} \\ &= B(\vec{r}) \cdot \frac{\{\vec{\alpha} + M\vec{r}; \vec{M}\vec{I}_i\}}{\{\vec{\gamma} + M\vec{r}; \vec{M}\vec{I}_i\}} \end{aligned}$$

Nous voyons donc que le quotient $\frac{A(\vec{r})}{B(\vec{r})}$ reste constant si l'on change $\vec{r}$ en $\vec{r} + \vec{I}_i$. Ceci est vrai pour $i = 1, 2, \dots, q$ donc

$\frac{A(\vec{r})}{B(\vec{r})}$ reste constant lorsque $\vec{r}$ varie sur une classe modulo $\mathbb{Z}^q$ dans $\mathbb{C}^q$, $A(\vec{r}) = B(\vec{r})$ a une constante multiplicative près.

Prenons cette constante égale à 1, alors :

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{\Gamma(\vec{\alpha} + M\vec{r})}{\Gamma(\vec{\gamma} + M\vec{r})}$$

Posons $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\ell}$ $\vec{r}_0 \in C^q$; $\vec{\ell} \in Z^q$

Alors $f = \sum A(\vec{r}) u^{\vec{r}} = \frac{\Gamma(\vec{\alpha} + M\vec{r}_0)}{\Gamma(\vec{\gamma} + M\vec{r}_0)} u^{\vec{r}_0} F_M(\vec{\alpha} + M\vec{r}_0 ; \vec{\gamma} + M\vec{r}_0 ; \vec{u})$

Donc la série $u^{\vec{r}_0} F_M(\vec{\alpha} + M\vec{r}_0 ; \vec{\gamma} + M\vec{r}_0 ; \vec{u})$ vérifie le même système différentiel S_{γ} que $F_M(\vec{\alpha} ; \vec{\gamma} ; \vec{u})$.

$\vec{r}_0$ est arbitraire dans C^q mais nous verrons en étudiant la convergence de ces séries que $\vec{r}_0$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs .

Remarquons que pour $\vec{r}_0 = 0$ nous retrouvons la fonction $F_M(\vec{\alpha} ; \vec{\gamma} ; \vec{u})$.

Par suite, toutes les solutions de la forme $\sum \Lambda(\vec{r}) u^{\vec{r}}$ du système S_{γ} sont données par la formule :

$$(16) \quad u^{\vec{r}_0} F_M(\vec{\alpha} + M\vec{r}_0 ; \vec{\gamma} + M\vec{r}_0 ; \vec{u})$$

3 - Convergence de la série $F_M(\vec{\alpha} ; \vec{\gamma} ; \vec{u})$

Nous noterons par : $\vec{\alpha} + M\vec{r}_0 = \vec{\alpha}_0$ et $\vec{\gamma} + M\vec{r}_0 = \vec{\gamma}_0$

$$\Lambda(\vec{r}) = A(\vec{r}_0 + \vec{\ell}) = \frac{\Gamma(\vec{\alpha}_0 + M\vec{\ell})}{\Gamma(\vec{\gamma}_0 + M\vec{\ell})}$$

Nous allons étudier la convergence de $F_M(\vec{\alpha}_0 ; \vec{\gamma}_0 ; \vec{u})$ qui est égale à $\sum \Lambda(\vec{r}) u^{\vec{r}}$ à un facteur près.

Etudions $\Lambda(\vec{r})$ en fonction de $\vec{r}$, c'est à dire en fonction de $\vec{\ell}$

$$A(\vec{r}) = \prod_{j=1}^p \frac{\Gamma(\alpha_{0j} + n_j)}{\Gamma(\gamma_{0j} + n_j)}$$

La fonction $\Gamma(z)$ ayant pour pôles les entiers négatifs et 0, nous distinguerons plusieurs cas suivant que les γ_{oj} seront entiers ou non.

a) Supposons qu'aucun des α_{oj} et γ_{oj} ne soit entier.

$A(\vec{r})$ n'est jamais nul et $A(\vec{r})$ a une valeur finie lorsque $\vec{r}$ est à une distance finie de l'origine.

Pour étudier la convergence de la série, il nous faut examiner le comportement du terme général à grande distance sur C^q . C'est un quotient de deux fonctions Γ .

$M\vec{\ell}$ décrit dans Z^p l'image de Z^q par l'application $\vec{\ell} \rightarrow M\vec{\ell}$
 $\vec{\ell}$ étant dans Z^q , soit δ la distance de l'origine au point $\vec{\ell}$.
 $\vec{\ell} = \delta \vec{e}$, $\vec{e}$ vecteur unitaire dans Z^q et soient $\beta_1 \dots \beta_p$ les composantes de $M\vec{e}$ de sorte que $n_j = \delta \beta_j$.

Si δ est grand et $\beta_j > 0$, on peut appliquer la formule de Stirling.

$$\text{Log } \Gamma(\alpha_{oj} + \delta \beta_j) = (\alpha_{oj} + \delta \beta_j + \frac{1}{2}) \text{Log } \delta \beta_j - \delta \beta_j + \frac{1}{2} \text{Log } 2\pi + o(\frac{1}{\delta \beta_j})$$

et :

$$\text{Log } \Gamma(\gamma_{oj} + \delta \beta_j) = (\gamma_{oj} + \delta \beta_j + \frac{1}{2}) \text{Log } \delta \beta_j - \delta \beta_j + \frac{1}{2} \text{Log } 2\pi + o(\frac{1}{\delta \beta_j})$$

Donc :

$$\text{Log } \frac{\Gamma(\alpha_{oj} + \delta \beta_j)}{\Gamma(\gamma_{oj} + \delta \beta_j)} = (\alpha_{oj} - \gamma_{oj}) \text{Log } \delta \beta_j + o(\frac{1}{\delta \beta_j})$$

et $\frac{\Gamma(\alpha_{oj} + \delta \beta_j)}{\Gamma(\gamma_{oj} + \delta \beta_j)}$ est de l'ordre de grandeur de $(\delta \beta_j)^{\alpha_{oj} - \gamma_{oj}}$

Si δ est grand et $\beta_j < 0$, appliquons la formule

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

$$\Gamma(\alpha_{oj} + \delta\beta_j) = \frac{e^{\pm\pi i}}{\sin(\pi \alpha_{oj}) \cdot \Gamma(1 - \alpha_{oj} - \delta\beta_j)}$$

le signe $\pm$ dépend de la parité de l'entier $\delta\beta_j$.

Remarquons que $\sin(\pi \alpha_{oj})$ et $\sin(\pi \gamma_{oj})$ sont différents de 0 puisque nous avons supposé que α_{oj} et γ_{oj} n'étaient pas entiers.

$$\frac{\Gamma(\alpha_{oj} + \delta\beta_j)}{\Gamma(\gamma_{oj} + \delta\beta_j)} = \frac{\sin(\pi \gamma_{oj})}{\sin(\pi \alpha_{oj})} \cdot \frac{\Gamma(1 - \gamma_{oj} - \delta\beta_j)}{\Gamma(1 - \alpha_{oj} - \delta\beta_j)}$$

Et en appliquant encore la formule de Stirling.

$$\frac{\Gamma(\alpha_{oj} + \delta\beta_j)}{\Gamma(\gamma_{oj} + \delta\beta_j)} \simeq \frac{\sin(\pi \gamma_{oj})}{\sin(\pi \alpha_{oj})} (-\delta\beta_j)^{\alpha_{oj} - \gamma_{oj}}$$

Donc quel que soit le signe de β_j , l'ordre de grandeur de

$$\frac{\Gamma(\alpha_{oj} + \delta\beta_j)}{\Gamma(\gamma_{oj} + \delta\beta_j)} \text{ est } \delta^{\alpha_{oj} - \gamma_{oj}}$$

$$\text{et } A(\vec{r}) = \prod_{j=1}^p \frac{\Gamma(\alpha_{oj} + \delta\beta_j)}{\Gamma(\gamma_{oj} + \delta\beta_j)} \text{ est comparable à } \delta^{\sum_{j=1}^p (\alpha_{oj} - \gamma_{oj})}$$

Par conséquent, la série $\sum_{\vec{r}} A(\vec{r}) u^{\vec{r}}$ est de même nature que la série $\sum_{\vec{r}} |\vec{r}|^K u^{\vec{r}}$, K étant une constante. Cette dernière série est divergente, quel que soit $\vec{u}$, puisque $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\ell}$, $\vec{\ell}$ décrivant tous les points de Z^q .

b) Supposons maintenant que certains γ_{oj} soient entiers
 α_{oj} n'étant pas entier.

Nous examinerons plus loin le cas où α_{oj} est entier.
 α_{oj} non entier $\implies \Gamma(\alpha_{oj} + n_j)$ est finie si n_j a une valeur finie,

et $\frac{\Gamma(\alpha_{oj} + n_j)}{\Gamma(\gamma_{oj} + n_j)}$ est nul lorsque certains des $\gamma_{oj} + n_j$ prennent

des valeurs entières ≤ 0 , les termes correspondants dans la série disparaissent. Donc nous voyons que nous pourrions avoir convergence si un nombre suffisant de γ_{oj} sont entiers.

Si certains des γ_{oj} sont entiers, le domaine de sommation est défini par $\gamma_{oj} + n_j > 0$. Ces inégalités définissent dans C^q un angle polyèdre ouvert convexe.

Cet angle sera déterminé s'il existe q indices j tels que les γ_{oj} correspondants soient entiers et tels que les n_j soient linéairement indépendants.

Supposons ces conditions vérifiées et choisissons convenablement la numérotation pour que ces q indices soient les q premiers.

Dans la série $\sum A(\vec{r}) u^{\vec{r}}$ la sommation est alors étendue aux $\vec{\ell}$ de Z^q tels que $\gamma_{oj} + n_j > 0$ pour $j = 1, 2, \dots, q$.

Cette série convergera dans un certain domaine des u_j que nous allons déterminer.

Notons par M_q la matrice formée des m_{ji} , $j = 1, 2, \dots, q$; $i = 1, 2, \dots, q$ et posons $\vec{n}' = M_q \vec{\ell}$, $\vec{n}' = (n_1, \dots, n_q)$. Les n_j étant linéairement indépendants, on peut exprimer

$$\ell_1, \dots, \ell_q \text{ en fonction de } n_1, \dots, n_q :$$

$$\vec{\ell} = M_q^{-1} \vec{n}'$$

Posons $M_q^{-1} = \|m'_{ji}\|$. Les m'_{ji} sont des nombres rationnels

$$\geq 0 \quad \text{ou} \quad < 0 ,$$

$$\ell_i = m'_{i1} n_1 + \dots + m'_{iq} n_q \quad i = 1, 2, \dots, q$$

et la série s'écrit encore :

$$u^{\vec{r}_0} \sum_{\substack{\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^q \\ \gamma_{0j} + n_j > 0; \quad j=1,2,\dots,q}} \frac{\Gamma(\vec{\alpha}_0 + M\vec{\ell})}{\Gamma(\vec{\gamma}_0 + M\vec{\ell})} (u_1^{m'_{11}} \dots u_q^{m'_{q1}})^{n_1} \dots (u_1^{m'_{1q}} \dots u_q^{m'_{qq}})^{n_q}$$

Désignons par $\vec{v} \in \mathbb{C}^q$, l'élément de composantes $v_j = u_1^{m'_{1j}} \dots u_q^{m'_{qj}}$

$j = 1, 2, \dots, q$.

$$\text{La série } u^{\vec{r}_0} \sum_{\substack{\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^q \\ \gamma_{0j} + n_j > 0; \quad j=1,2,\dots,q}} \frac{\Gamma(\vec{\alpha}_0 + M\vec{\ell})}{\Gamma(\vec{\gamma}_0 + M\vec{\ell})} v_1^{n_1} \dots v_q^{n_q} \text{ converge pour}$$

$|v_j| < 1 \quad j = 1, 2, \dots, q$ puisque les n_j sont bornés inférieurement.

Donc le domaine de convergence de la série $\sum \Lambda(\vec{r}) u^{\vec{r}}$ sera déterminé par :

$$\underbrace{|u_1|^{m'_{11}} \dots |u_q|^{m'_{q1}}} < 1 \quad j=1, 2, \dots, q$$

Remarquons que dans le cas où la matrice M_q est diagonale le domaine de convergence est $\underbrace{|u_i| < 1}_{i=1, 2, \dots, q}$

Le choix de $\vec{r}_0$ dans la classe des exposants de la série est resté arbitraire. Or ce choix n'importe pas et ne change rien à la somme de la série. Changer $\vec{r}_0$ en $\vec{r}_0 + \vec{\ell}_0$ avec $\vec{\ell}_0 \in \mathbb{Z}^q$ revient à changer $\vec{\ell}$ en $\vec{\ell} - \vec{\ell}_0$, le domaine de sommation subit simplement une translation.

Nous pouvons donc choisir $\vec{r}_0$, de telle sorte que les γ_{0j} , $j = 1, 2, \dots, q$ soient tous positifs et le plus petit possible, c'est à dire que $\gamma_{0j} + n_j > 0 \Rightarrow n_j \geq 0$, ceci est toujours possible.

Pour $j > q$, les γ_{0j} sont quelconques, si certains sont entiers cela ne fait que supprimer un nombre fini de termes nuls de la série.

Donc finalement la série $F_M(\vec{\alpha}_0; \vec{\gamma}_0; \vec{u})$ est définie par :

$$\sum_{\substack{\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^q \\ \gamma_{0j} + n_j > 0 \\ j=1,2,\dots,q}} \frac{(\vec{\alpha}_0; M\vec{\ell})}{(\vec{\gamma}_0; M\vec{\ell})} u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

γ_{0j} entier positif, tel que $\gamma_{0j} + n_j > 0 \Rightarrow n_j \geq 0$
 $j = 1, 2, \dots, q$. Les n_j étant linéairement indépendants.

Le domaine de convergence est déterminé par :

$$|u_1|^{m'_{1j}} \dots |u_q|^{m'_{qj}} < 1 \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

$$M_q = \|m_{ji}\|, \quad M_q^{-1} = \|m'_{ij}\|, \quad j = 1, 2, \dots, q; \quad i = 1, 2, \dots, q$$

Cette série ne diffère de la série $\sum A(\vec{r}) u^{\vec{r}}$ que par le

$$\text{facteur } \frac{\Gamma(\vec{\alpha}_0)}{\Gamma(\vec{\gamma}_0)} u^{\vec{r}_0} \quad \text{qui sera différent de 0 si pour}$$

$$j > q \quad \gamma_{0j} \text{ n'est pas un entier } \leq 0.$$

c) Il nous reste à examiner le cas où certains α_{0j} sont entiers

$$\text{Si } \alpha_{0j} \text{ est entier, } \gamma_{0j} \text{ ne l'étant pas, } \frac{\Gamma(\alpha_{0j} + n_j)}{\Gamma(\gamma_{0j} + n_j)}$$

devient infini pour $\alpha_{oj} + n_j \leq 0$

$$n_j \leq -\alpha_{oj}$$

et il est clair que la série correspondante diverge.

Si α_{oj} est entier, γ_{oj} étant aussi entier, le quotient

$$\frac{\Gamma(\alpha_{oj} + n_j)}{\Gamma(\gamma_{oj} + n_j)}$$
 est un polynôme en n_j si $\alpha_{oj} > \gamma_{oj}$ et

l'inverse d'un polynôme si $\alpha_{oj} < \gamma_{oj}$

Donc si $\alpha_{oj} > \gamma_{oj}$ ce quotient a une valeur finie pour n_j fini.

Si $\alpha_{oj} < \gamma_{oj}$ ce quotient ne sera fini que si ce polynôme d'ordre $\gamma_{oj} - \alpha_{oj}$ ne peut pas s'annuler, c'est à dire s'il n'existe pas de $\vec{\ell}$ dans Z^q tel que $n_j = -\gamma_{oj}$.

Le quotient
$$\frac{\Gamma(\alpha_{oj} + n_j)}{\Gamma(\gamma_{oj} + n_j)}$$
 peut ainsi avoir une valeur

finie, mais il n'est plus nul pour $n_j < -\gamma_{oj}$, donc cet indice j ne peut faire partie de l'ensemble des q indices déterminant l'angle polyèdre convexe précédent.

Finalement en choisissant convenablement la numérotation des indices, il faut donc pour assurer la convergence que :

Pour $j = 1, 2, \dots, q$ - γ_{oj} entier > 0 tel que $\gamma_{oj} + n_j > 0 \Rightarrow n_j > -\gamma_{oj}$
 - α_{oj} non entier

Pour $j > q$ - γ_{oj} peut être quelconque à l'exception des entiers ≤ 0 .
 - α_{oj} ne peut être entier que si le γ_{oj} correspondant est entier et vérifie certaines

conditions qui sont des conséquences du raisonnement précédent mais que nous ne préciserons pas ici.

Remarque - $F_M(\vec{\alpha}; \vec{l}; \vec{u}) = F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$

Nous avons vu que la série $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$ converge dans le domaine de C^q défini par $|x_j| < 1$, $j = 1, 2, \dots, p$; ce domaine correspond à $|u_1|^{m'_{1j}} \dots |u_q|^{m'_{qj}} < 1$ $j = 1, 2, \dots, q$.

4 - Nombre de solutions du système différentiel S_Y
(formule 13 - page 12).

Nous avons remarqué page 14 que le système différentiel vérifié par $F_M(\vec{\alpha}; \vec{y}; \vec{u})$ admettait comme autres solutions de la forme $\sum A(\vec{r}) u^{\vec{r}}$ les séries :

$$u^{\vec{r}_0} F_M(\vec{\alpha} + M\vec{r}_0; \vec{y} + M\vec{r}_0; \vec{u}) \quad \vec{r}_0 \in C^q$$

Supposons qu'il existe dans l'ensemble d'indices $1, 2, \dots, q$ une partie P telle que pour $j \in P$ les n_j soient linéairement indépendants; soit M_q la matrice correspondante.

$\vec{r}_0$ n'est pas arbitraire dans C^q car les composantes $y_{0j} = y_j + n_j(\vec{r}_0)$, $j \in P$ doivent être entières et telles que $y_{0j} + n_j > 0 \implies n_j \geq 0$.
Notons par $\vec{y}'_0$ et $\vec{y}'$ les éléments de C^q de composantes y'_{0j} et y'_j , $j \in P$.

$$M_q \vec{r}_0 = \vec{y}'_0 - \vec{y}'$$

$$\vec{r}_0 = M_q^{-1} (\vec{y}'_0 - \vec{y}')$$

Le nombre de valeurs possibles pour $\vec{r}_0$ est donc le même que le nombre de possibilités pour $\vec{y}_0$, qui est égal à $|\det M_q|$.

Nous supposons les conditions sur $\vec{\alpha}_0$ vérifiées (voir page 21). Si de la matrice M on peut extraire plusieurs matrices M_q , pour chaque matrice M_q le nombre de solutions est égal à $|\det M_q|$.

Donc le nombre de solutions de la forme $\sum A(\vec{r}) u^{\vec{r}}$ ($\vec{r}$ décrivant dans C^q une classe modulo Z^q), du système S_y est égal à

$$\sum_{M_q} |\det M_q|$$

la sommation étant étendue à toutes les matrices M_q que l'on peut extraire de M , sous les conditions susdites.

5) - Propriété intégrale de $F_M(\vec{\alpha}; \vec{y}; \vec{u})$.

La fonction $F_M(\vec{\alpha}, \vec{u})$ est égale à $\int_{a \in G} \dots \int \prod_{j=1}^p \frac{1}{(1-a_j x_j)^{\alpha_j}}$ da

Nous allons chercher si la fonction $F_M(\vec{\alpha}; \vec{y}; \vec{u})$ qui généralise $F_M(\vec{\alpha}; \vec{u})$ peut s'écrire aussi sous la forme d'une intégrale du même type.

Etudions l'intégrale suivante :

$$\int_{a \in G} \dots \int \prod_{j=1}^p (1-a_j x_j)^{-\alpha_j} \cdot a^{-\vec{y}_1} \quad da,$$

(voir définitions de G et da pages 2 et 3)

$$\vec{\alpha}_1, \vec{y}_1 \in C^p; \quad a^{-\vec{y}_1} = a_1^{-y_1^1} \dots a_p^{-y_1^p}$$

Si nous changeons dans cette intégrale $x \rightarrow bx$, elle se reproduit multipliée par le facteur $b^{-\vec{y}_1}$. Par conséquent

l'intégrale : $F_{\gamma'} = x^{-\gamma'} \int_{a \in G} \dots \int \prod_{j=1}^p (1 - a_j x_j)^{-\alpha_j'} a^{-\vec{\gamma}'}$ da
est invariante par le groupe G.

Développons cette intégrale en série (calcul analogue à celui fait page 4).

Pour $|x_j| < 1$, $j = 1, 2, \dots, p$.

$$F_{\gamma'} = x^{-\gamma'} \int_{a \in G} \dots \int \prod_{j=1}^p \left(\sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j'; k_j)}{k_j!} a_j^{k_j} x_j^{k_j} \right) a^{-\vec{\gamma}'} da$$

$$F_{\gamma'} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}_+^p} \left(\prod_{j=1}^p \frac{(\alpha_j'; k_j)}{k_j!} \right) \left\{ \int_{a \in G} a_1^{k_1 - \gamma_1'} \dots a_p^{k_p - \gamma_p'} da \right\}$$

$$\int_{a \in G} a_1^{k_1 - \gamma_1'} \dots a_p^{k_p - \gamma_p'} da = 0, \text{ sauf si } \vec{k} - \vec{\gamma}' = M \vec{\ell},$$

dans ce cas l'intégrale vaut 1.

Il faut donc supposer que les γ_j' , $j = 1, 2, \dots, p$ soient entiers
sinon $-\gamma_j' + k_j$ ne serait pas entier et l'intégrale serait nulle.

Donc :

$$F_{\gamma'} = \sum_{\substack{\vec{k} \in \mathbb{Z}_+^p \\ \vec{k} - \vec{\gamma}' = M \vec{\ell}}} \prod_{j=1}^p \frac{(\alpha_j'; k_j)}{k_j!} \cdot x_1^{k_1 - \gamma_1'} \dots x_p^{k_p - \gamma_p'}$$

ou encore :

$$F_{\gamma'} = \sum_{\substack{\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^q \\ \vec{\gamma}' + M \vec{\ell} \in \mathbb{Z}_+^p}} \prod_{j=1}^p \frac{(\alpha_j'; \sum_{i=1}^q m_{ji} \ell_i + \gamma_j')}{(\sum_{i=1}^q m_{ji} \ell_i + \gamma_j')!} u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

$$= \sum_{\substack{\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^q \\ \vec{\gamma}' + M \vec{\ell} \in \mathbb{Z}_+^p}} \frac{\Gamma(\vec{\alpha}'; M \vec{\ell} + \vec{\gamma}')}{\Gamma(M \vec{\ell} + \vec{\gamma}' + \vec{1})} u^{\vec{\ell}}$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$F_{\gamma'} = \frac{(\vec{\alpha'}; \vec{\gamma'})}{\Gamma(\vec{\gamma'} + \vec{1})} \sum_{\substack{\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^q \\ M\vec{\ell} + \vec{\gamma'} \in \mathbb{Z}_+^p}} \frac{(\vec{\alpha'} + \vec{\gamma'}; M\vec{\ell})}{(\vec{\gamma'} + \vec{1}; M\vec{\ell})} u^{\vec{\ell}}$$

Prenons dans l'ensemble des indices $j = 1, 2, \dots, p$, une partie P de q indices tels que les n_j correspondants à $j \in P$ soient linéairement indépendants et considérons la série

$$F_M = \sum_{\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^q} \frac{(\vec{\alpha'} + \vec{\gamma'}; M\vec{\ell})}{(\vec{\gamma'} + \vec{1}; M\vec{\ell})} u^{\vec{\ell}}.$$

$$n_j + \gamma'_j > 0 \text{ pour } j \in P$$

Les points de l'angle polyèdre : $\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^q$, $n_j + \gamma'_j > 0$ pour $j \in P$, qui ne sont pas dans l'angle polyèdre : $\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^q$, $M\vec{\ell} + \vec{\gamma'} \in \mathbb{Z}_+^p$, correspondent au cas où $n_j + \gamma'_j > 0$ pour $j \in P$ et où au moins un des $n_j + \gamma'_j$, j non dans P , est ≤ 0 . Mais comme γ'_j est entier quel que soit j ,

$$n_j + \gamma'_j \leq 0 \implies \frac{(\vec{\alpha'} + \vec{\gamma'}; M\vec{\ell})}{(\vec{\gamma'} + \vec{1}; M\vec{\ell})} = 0 \text{ et les termes}$$

correspondants de la série sont nuls.

Donc toutes les composantes γ'_j de $\vec{\gamma'}$ étant entières, nous pouvons écrire :

$$F_M(\vec{\alpha'} + \vec{\gamma'}; \vec{\gamma'} + \vec{1}; u) = \sum_{\substack{\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^q \\ M\vec{\ell} + \vec{\gamma'} \in \mathbb{Z}_+^p}} \frac{(\vec{\alpha'} + \vec{\gamma'}; M\vec{\ell})}{(\vec{\gamma'} + \vec{1}; M\vec{\ell})} u^{\vec{\ell}}$$

Par conséquent :

$$F_{\gamma'} = \frac{(\vec{\alpha'}; \vec{\gamma'})}{\Gamma(\vec{\gamma'} + \vec{1})} \cdot F_M(\vec{\alpha'} + \vec{\gamma'}; \vec{\gamma'} + \vec{1}; u)$$

$$\begin{aligned} \text{Posons } \vec{\alpha'} + \vec{\gamma'} &= \vec{\alpha} & \vec{\alpha'} &= \vec{\alpha} - \vec{\gamma} + \vec{1} \\ \vec{\alpha'} + \vec{1} &= \vec{\gamma} & \vec{\gamma'} &= \vec{\gamma} - \vec{1} \end{aligned} \implies$$

Par définition :

$$F_{\vec{\gamma}} = F_{\vec{\gamma}-\vec{1}} = x^{-\vec{\gamma}+\vec{1}} \int_{a \in G} \dots \int \prod_{j=1}^p (1-a_j x_j)^{-\alpha_j + \gamma_j - 1} a^{-\vec{\gamma}+\vec{1}} da$$

Par suite, lorsque toutes les composantes γ_j de $\vec{\gamma}$ sont entières

$$(17) \quad F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u}) = \frac{\Gamma(\vec{\gamma}) \cdot \Gamma(\vec{\alpha}-\vec{\gamma}+\vec{1})}{\Gamma(\vec{\alpha})} \cdot x^{\vec{1}-\vec{\gamma}} \int_{a \in G} \dots \int \prod_{j=1}^p (1-a_j x_j)^{-\alpha_j + \gamma_j - 1} \underline{a^{-\vec{\gamma}+\vec{1}} da}$$

III - EXEMPLES DE FONCTIONS $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$

1 - Série hypergéométrique de Gauss.

$$F(a, b; 1, c; z) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)}{2!} \frac{b(b+1)}{c(c+1)} z^2 + \dots + \frac{(a; n)(b; n)}{n! (c; n)} z^n + \dots$$

Nous trouvons cette série en faisant dans la série $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$
 $p = 2$, $q = 1$, $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u = z$

On pose $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$, $\gamma_2 = c$, $\gamma_1 = 1$

(1 est la seule valeur possible pour γ_1 , entier > 0 ,
 $\leq m_{11} = 1$)

Les conditions de convergence de cette série sont bien connues
 ($|z| < 1$) et la formation de son équation différentielle se
 rattache à la théorie précédente.

Nous avons :

$$z_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad z_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + c - 1$$

$$Y_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a \qquad Y_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + b$$

$$u = x_1 x_2 = z$$

l'équation différentielle est :

$$\left[x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + c - 1) - z (x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a) (x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + b) \right] f = 0$$

Mais $\sigma_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} = z \frac{\partial}{\partial z}$

et $\sigma_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} = z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{voir formule 6})$

Donc :

$$\left[z \frac{\partial}{\partial z} (z \frac{\partial}{\partial z} + c - 1) - z (z \frac{\partial}{\partial z} + a) (z \frac{\partial}{\partial z} + b) \right] f = 0$$

Nous retrouvons bien l'équation différentielle connue dont est solution la série hypergéométrique de Gauss .

$$\text{Formons } \sum_{M_q} \left| \det M_q \right| = 1 + 1 = 2$$

Cette équation différentielle a deux solutions de la forme $\sum a(n) z^n$, l'une est $F(a, b; 1, c; z)$, l'autre est de la forme $u^{\vec{r}_0} F_M(\vec{\alpha} + M\vec{r}_0; \vec{\gamma} + M\vec{r}_0; \vec{u})$ c'est à dire :

$$z^{r_0} F(a+r_0, b+r_0; 1+r_0, c+r_0; z)$$

Puisque $m_{21} = 1$, la seule possibilité pour γ_{02} est 1 donc : $c + r_0 = 1 \implies r_0 = 1 - c$

donc la deuxième solution de l'équation différentielle est :

$$z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c; 1, 2-c; z)$$

L'équation différentielle étant du 2^{ème} ordre, la solution générale de cette équation est :

$$A F(a, b; 1, c; z) + B z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c; 1, 2-c; z)$$

A, B étant des constantes.

Appliquons maintenant le résultat de la p.26

Si c est entier, la fonction $F(a, b; 1, c; z)$ est égale à l'intégrale suivante :

$$F = \frac{\Gamma(c) \cdot \Gamma(a) \cdot \Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} x_2^{1-c} \int_{A \in G} (1-a_1 x_1)^{-a} (1-a_2 x_2)^{-b+c-1} a_2^{1-c} dA$$

G groupe des transformations linéaires diagonales .

$$|a_1| = |a_2| = 1 \quad a_1 a_2 = 1$$

$$\text{Posons } a_1 = e^{i\varphi} \implies a_2 = e^{-i\varphi}$$

$$\int_{A \in G} dA = \frac{1}{2^{\pi}} \int_0^{2^{\pi}} d\varphi$$

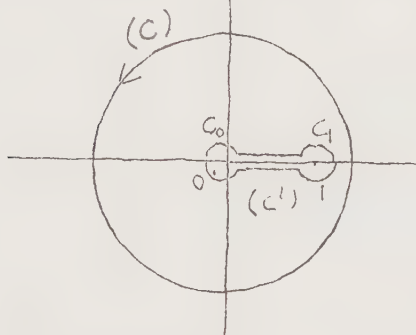
$$F = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-c+1)}{\Gamma(b)} \cdot \frac{x_2^{1-c}}{2^{\pi}} \int_0^{2^{\pi}} (1-x_1 e^{i\varphi})^{-a} (1-x_2 e^{-i\varphi})^{-b+c-1} (e^{-i\varphi})^{1-c} d\varphi$$

Soient $\zeta = \frac{e^{i\varphi}}{x_2}$ et (C) le cercle de rayon $\frac{1}{x_2}$ centré à l'origine.

$$F = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-c+1)}{\Gamma(b)} \cdot (-1)^{-b+c-1} \cdot \frac{1}{2^{\pi} i} \int_{(C)} (1-\zeta z)^{-a} (1-\zeta)^{-b+c-1} \zeta^{b-1} d\zeta$$

x_2 est < 1 et $\frac{1}{x_2}$ est > 1 . A l'intérieur de (C), il peut y avoir pour pôles $\zeta = 0$, $\zeta = 1$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x_1 x_2} > \frac{1}{x_2} \text{ donc } \frac{1}{z} \text{ ne se trouve pas dans (C).}$$



L'intégrale suivant (C) est égale à l'intégrale le long du chemin (C') qui se compose du segment (0), du cercle c_0 de centre 0 de rayon ϵ , du segment (01), du cercle c_1 de centre 1 et de rayon ϵ .

Examinons l'intégrale le long de c_0 , elle est égale à

$$\int_0^{2^{\pi}} \epsilon^b e^{ib\varphi} d\varphi \times \text{constante} = \epsilon^b \times \text{constante},$$

si $\Re(b)$ est > 0 , l'intégrale $\rightarrow 0$, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

De même le long du contour c_1 , l'intégrale est égale à

$$\int_0^{2^{\pi}} \epsilon^{-b+c} e^{i(b+c)\varphi} d\varphi \times \text{constante} = \epsilon^{c-b} \times \text{constante}$$

si $\Re(c) > \Re(b)$ l'intégrale $\rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Donc si $\Re(c) > \Re(b) > 0$

$$F = \frac{\Gamma(c) \cdot \Gamma(b-c+1)}{\Gamma(b)} (-1)^{-b+c-1} \frac{1}{2^{\pi i}} \left(- \int_0^1 (1-tz)^{-a} (1-t)^{-b+c-1} t^{b-1} dt \right. \\ \left. + \int_0^1 (1-tz)^{-a} (1-t)^{-b+c-1} t^{b-1} e^{2\pi i(b-1)} dt \right)$$

$$F = \frac{\Gamma(c) \cdot \Gamma(b-c+1)}{\Gamma(b)} (-1)^{c-1} \cdot \frac{1}{2^{\pi i}} e^{-\pi i b} (-1 + e^{2\pi i b}) \cdot \int_0^1 (1-tz)^{-a} \cdot \\ (1-t)^{-b+c-1} t^{b-1} dt$$

$$e^{-\pi i b} \left(\frac{-1 + e^{2\pi i b}}{2i} \right) = \sin \pi b$$

$$\text{et } \Gamma(b-c+1) = \frac{\pi}{\sin \pi(c-b) \cdot \Gamma(c-b)} = - \frac{(-1)^c \pi}{\sin \pi b \cdot \Gamma(c-b)}.$$

Donc c étant entier.

$$F(a, b; 1, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \cdot \Gamma(c-b)} \cdot \int_0^1 (1-tz)^{-a} (1-t)^{-b+c-1} t^{b-1} dt$$

2 - Fonction hypergéométrique correspondant à $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ p lignes

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_p; 1, \gamma_2, \dots, \gamma_p; u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1; n)(\alpha_2; n) \dots (\alpha_p; n)}{n! (\gamma_2; n) \dots (\gamma_p; n)} u^n$$

($\gamma_1 = 1$, puisque la condition de convergence est ici que l'un des γ_j soit entier > 0 et $\leq m_{11}$ qui est égal à 1 .

Cette série, qui converge pour $|u| < 1$, est solution d'une équation différentielle.

Le système 13 de la page 12 se réduit à une seule équation puisque $q = 1$

$$Y_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha_j = u \frac{\partial}{\partial u} + \alpha_j$$

$$Z_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \gamma_j - 1 = u \frac{\partial}{\partial u} + \gamma_j - 1$$

L' équation différentielle est alors :

$$\left(\prod_{j=1}^p \left(u \frac{\partial}{\partial u} + \gamma_j - 1 \right) - u \prod_{j=1}^p \left(u \frac{\partial}{\partial u} + \alpha_j \right) \right) f = 0$$

Le nombre de solutions de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} A(n) u^n$ de cette équation est égal à :

$$\sum_{M_q} |\det M_q| = 1 + \dots + 1 = p$$

Ces solutions sont de la forme $u^{\vec{r}_0} F_M(\vec{\alpha} + M\vec{r}_0; \vec{\gamma} + M\vec{r}_0; \vec{u})$.
 $r_0 \in \mathbb{C}$ $M\vec{r}_0$ a pour composantes $\begin{cases} r_0 \\ \vdots \\ r_0 \end{cases}$

Une composante de $\vec{\gamma}_0 = \vec{\gamma} + M\vec{r}_0$ doit être égale à 1, donc les p valeurs possibles pour r_0 sont $r_0 = 1 - \gamma_j \quad j = 1, 2, \dots, p$
 Et les p solutions de l'équation différentielle ci-dessus sont :

$$u^{1-\gamma_j} F(\alpha_1+1-\gamma_j, \dots, \alpha_p+1-\gamma_j; 2-\gamma_j, \gamma_2+1-\gamma_j, \dots, 1, \dots, \gamma_p+1-\gamma_j; u)$$

$j = 1, 2, \dots, p$

Ces solutions sont distinctes si $1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ sont tous différents modulo 1.

Remarquons que lorsque les γ_j sont entiers, nous pouvons appliquer la formule de la page 26. Dans ce cas l'intégrale a une forme compliquée, nous ne la calculerons pas.

3 - Fonction F_1 D'Appell.

$$F_1 = \sum_{n,m} \frac{(\alpha_1; m)(\alpha_2; n)(\alpha_3; m+n)}{m! n! (\gamma_3; m+n)} u_1^m u_2^n$$

Nous trouvons cette fonction en prenant la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Cette série converge pour $|u_1| < 1$, $|u_2| < 1$, elle est solution d'un système de 2 équations différentielles.

$$x_1 x_3 = u_1 \quad ; \quad x_2 x_3 = u_2$$

$$\sigma_1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} \quad ; \quad \sigma_2 = u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} \quad ; \quad \sigma_3 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}$$

Cherchons la 1^{ère} équation $i = 1$.

$$z_1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} \quad ; \quad z_2 = 1 \quad ; \quad z_3 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \gamma_3 - 1$$

$$Y_1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \alpha_1 \quad ; \quad Y_2 = 1 \quad ; \quad Y_3 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha_3$$

et :

$$\frac{\left[u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} (u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \gamma_3 - 1) - u_1 (u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \alpha_1) \right]}{(u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha_3)} f = 0$$

Pour la deuxième équation $i = 2$.

$$z_1 = 1 \quad ; \quad z_2 = u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} \quad ; \quad z_3 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \gamma_3 - 1$$

$$Y_1 = 1 \quad ; \quad Y_2 = u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha_2 \quad ; \quad Y_3 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha_3$$

nous obtenons :

$$\frac{\left[u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} (u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \gamma_3 - 1) - u_2 (u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha_2) \right]}{(u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha_3)} f = 0$$

Le système possède $\sum_{M_q} |\det M_q|$ solutions de la forme

$$\sum A(\vec{r}) u^{\vec{r}}.$$

Les matrices M_q que l'on peut extraire de M sont :

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sum_{M_q} |\det M_q| = 3$ et le système possède 3 solutions qui sont données par la formule $u_{\vec{r}_0} = F_M(\vec{\alpha} + M\vec{r}_0; \vec{\gamma} + M\vec{r}_0; \vec{u})$, où les deux composantes de $\vec{\gamma}'_0 = \vec{\gamma}' + M_q \vec{r}_0$ sont égales à 1.

(γ'_{0j} entier > 0 tel que $\gamma'_{0j} + n_j > 0 \Rightarrow n_j \geq 0$)

a) $\underline{M_q = M_{12}}$

$$1 = \gamma_1 + r_{01} \quad r_{01} = 0$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1 \Rightarrow$$

$$1 = \gamma_2 + r_{02} \quad r_{02} = 0$$

Nous retrouvons la fonction F_1 qui converge pour $|u_1| < 1$,

$|u_2| < 1$ (matrice M_{12} diagonale).

b) $\underline{M_q = M_{13}}$

$$1 = \gamma_1 + r_{01} \quad r_{01} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$1 = \gamma_3 + r_{01} + r_{02} \quad r_{02} = 1 - \gamma_3$$

La solution correspondante est :

$$F'_1 = \frac{u_2^{1-\gamma_3} \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n+m \geq 0}} \frac{(\alpha_1; m)(\alpha_2+1-\gamma_3; n)(\alpha_3+1-\gamma_3; m+n)}{m! (2-\gamma_3; n) (m+n)!} u_1^m \cdot u_2^n}{1}$$

Appliquons le résultat de la page 19 .

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{13}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette série converge pour :

$$\begin{cases} |u_1| < 1 \\ |u_1|^{-1} |u_2| < 1 \end{cases} \Rightarrow |u_2| < |u_1|$$

$$c) \quad \underline{M_q = M_{23}}$$

$$1 = \gamma_2 + r_{02}$$

$$r_{02} = 0$$

$\implies$

$$1 = \gamma_3 + r_{01} + r_{02}$$

$$r_{01} = 1 - \gamma_3$$

La 3ème solution est :

$$F_1'' = \frac{u_1^{1-\gamma_3} \sum_{\substack{n \geq 0 \\ m+n \geq 0}} \frac{(\alpha_1+1-\gamma_3; m)(\alpha_2; n)(\alpha_3+1-\gamma_3; m+n)}{(2-\gamma_3; m) n! (m+n)!} u_1^m \cdot u_2^n}{1}$$

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies M_{23}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le domaine de convergence est :

$$\begin{cases} |u_1|^{-1} |u_2| < 1 \\ |u_1| < 1 \end{cases} \implies |u_2| < |u_1|$$

Représentation intégrale de F_1 lorsque γ_3 est entier.

Appliquons le résultat de la page 26 :

$$x_1 x_2 = u_1$$

$$x_2 x_3 = u_2$$

$$a_1 a_3 = 1 ; \quad a_2 a_3 = 1 \implies a_1 = a_2 = e^{i\varphi} ; \quad a_3 = e^{-i\varphi}$$

Alors :

$$F_1 = \frac{\Gamma(\gamma_3) \cdot \Gamma(\alpha_3 - \gamma_3 + 1)}{\Gamma(\alpha_3)} \cdot x_3^{1-\gamma_3} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1-e^{i\varphi} x_1)^{-\alpha_1} (1-e^{i\varphi} x_2)^{-\alpha_2} \cdot (1-e^{-i\varphi} x_3)^{-\alpha_3 + \gamma_3 - 1} \cdot e^{-i\varphi(-\gamma_3 + 1)} \cdot d\varphi$$

On pose $\frac{e^{i\varphi}}{x_3} = \zeta$ et un calcul analogue à celui de la page 29

montre que :

$$F_1 = \frac{\Gamma(\gamma_3)}{\Gamma(\alpha_3) \cdot \Gamma(\gamma_3 - \alpha_3)} \int_0^1 (1-u_1 t)^{-\alpha_1} (1-u_2 t)^{-\alpha_2} (1-t)^{-\alpha_3 + \gamma_3 - 1} t^{\alpha_3 - 1} dt$$

Lorsque $\Re(\gamma_3) > \Re(\alpha_3) > 0$, γ_3 entier

$2 - \gamma_3$ est aussi entier et nous avons encore une représentation
intégrale pour F'_1 et F''_1

IV - GENERALISATION à une MATRICE M DONT LES ELEMENTS SONT DES ENTIERS QUELCONQUES

Nous avons supposé précédemment que les éléments de M étaient des entiers ≥ 0 , examinons maintenant le cas où les m_{ji} sont des entiers de signe quelconque.

Nous dirons encore que $u_i = x_1^{m_{1i}} \dots x_p^{m_{pi}}$ est un monôme, en généralisant le sens du mot monôme.

Nous gardons les mêmes notations et nous définirons encore la fonction $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$ par la série suivante :

$$(18) \quad F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u}) = \sum_{\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^q} \frac{[\vec{\alpha}; M\vec{\ell}]}{[\vec{\gamma}; M\vec{\ell}]} u^{\vec{\ell}}$$

la sommation étant étendue à tous les $\vec{\ell}$ de $\mathbb{Z}^q$.

1 - Propriété différentielle de $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$

Nous allons chercher si l'on peut généraliser, dans le cas où les m_{ji} sont de signe quelconque, le système différentiel de la page 12.

Nous introduisons les opérateurs suivants :

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^q m_{ji} u_i \frac{\partial f}{\partial u_i}$$

$$Y_j = [\sigma_j + \alpha_j] [\sigma_j + \alpha_j + 1] \dots [\sigma_j + \alpha_j + |m_{ji}| - 1]$$

$$Z_j = [\sigma_j + \gamma_j - 1] [\sigma_j + \gamma_j - 2] \dots [\sigma_j + \gamma_j - |m_{ji}|]$$

Appliquons Y_j et Z_j à $u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$

$$Y_j(u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}) = (n_j + \alpha_j; |m_{ji}|) u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}$$

$$Z_j(u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}) = (n_j + \gamma_j - |m_{ji}|; |m_{ji}|) u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}$$

Notons par : t l'indice j si m_{ji} est > 0
 et s l'indice j si m_{ji} est < 0

Formons l'opérateur $\prod_t Z_t \cdot \prod_s Y_s$ et calculons $\prod_t Z_t \cdot \prod_s Y_s(A)$

A terme général de la série $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$.

$$\prod_t Z_t \cdot \prod_s Y_s(u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}) = \prod_t (n_t + \gamma_t - m_{ti}; m_{ti}) \cdot \prod_s (n_s + \alpha_s; -m_{si}) \cdot$$

$$\prod_t Z_t \cdot \prod_s Y_s(A) = \frac{\prod_t (\alpha_t; n_t) \cdot \prod_s (\alpha_s; n_s)}{\prod_t (\gamma_t; n_t) \cdot \prod_s (\gamma_s; n_s)} \cdot \prod_t (n_t + \gamma_t - m_{ti}; m_{ti}) \cdot$$

$$\prod_s (n_s + \alpha_s; m_{si}) \cdot u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}$$

Remarquons que :

$$(n_j + \gamma_j - |m_{ji}|; |m_{ji}|) = \frac{(\gamma_j; |m_{ji}| + n_j - |m_{ji}|)}{(\gamma_j; n_j - |m_{ji}|)} = \frac{(\gamma_j; n_j)}{(\gamma_j; n_j - |m_{ji}|)}$$

Donc :

$$\prod_t Z_t \cdot \prod_s Y_s(A) = \frac{\prod_t (\alpha_t; n_t) \cdot \prod_s (\alpha_s; n_s - m_{si})}{\prod_t (\gamma_t; n_t - m_{ti}) \cdot \prod_s (\gamma_s; n_s)} \cdot u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}$$

Appliquons maintenant l'opérateur $\prod_s Z_s \cdot \prod_t Y_t$ à A .

$$\prod_s Z_s \cdot \prod_t Y_t(u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}) = \prod_s (n_s + \gamma_s + m_{si}; -m_{si}) \cdot$$

$$\prod_t (n_t + \alpha_t; m_{ti}) \cdot u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}$$

$$\prod_s Z_s \cdot \prod_t Y_t(A) = \frac{\prod_t (\alpha_t; n_t) \cdot \prod_s (\alpha_s; n_s)}{\prod_t (\gamma_t; n_t) \cdot \prod_s (\gamma_s; n_s)} \cdot \prod_s (n_s + \gamma_s + m_{si}; -m_{si}) \cdot$$

$$\prod_t (n_t + \alpha_t; m_{ti}) \cdot u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}$$

$$\prod_s Z_s \cdot \prod_t Y_t (A) = \frac{\prod_t (\alpha_t; n_t + m_{t1}) \cdot \prod_s (\alpha_s; n_s)}{\prod_t (\gamma_t; n_t) \cdot \prod_s (\gamma_s; n_s + m_{si})} \cdot u_1^{\ell_1} \dots u_q^{\ell_q}$$

Nous retrouvons ce dernier résultat multiplié par u_i , en changeant $\vec{\ell}$ en $\vec{\ell} + \vec{I}_i$ dans $\prod_t Z_t \cdot \prod_s Y_s (A)$.

Donc l'application des opérateurs $\prod_t Z_t \cdot \prod_s Y_s$ et $u_i \prod_s Z_s \cdot \prod_t Y_t$ au développement formel de $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$ fournit le même développement en supposant la sommation étendue à tous les éléments $\vec{\ell}$ de Z^q .

La série formelle est solution du système suivant :

$$S_\gamma \cdot \left[\prod_t Z_t \cdot \prod_s Y_s - u_i \prod_s Z_s \cdot \prod_t Y_t \right] F = 0 \quad i=1,2,\dots,q$$

avec :

$$(19) \quad \begin{cases} Z_j = (\sigma_j + \gamma_j - 1)(\sigma_j + \gamma_j - 2) \dots (\sigma_j + \gamma_j - |m_{ji}|) \\ Y_j = (\sigma_j + \alpha_j)(\sigma_j + \alpha_j + 1) \dots (\sigma_j + \alpha_j + |m_{ji}| - 1) \end{cases}$$

Remarquons que si tous les m_{ji} sont > 0 , $s = 0$, nous retrouvons le système (13) de la page 13.

Nous pouvons comme précédemment examiner si le système S_γ possède d'autres solutions de la forme :

$$f = \sum_r A(r) u^{\vec{r}}.$$

où les $\vec{r}$ décrivent dans C^q une classe modulo Z^q .

En écrivant que f est solution de S_γ , nous obtenons la relation :

$$A(\vec{r} + \vec{I}_i) = \frac{\prod_t (n_t + \alpha_t; m_{ti}) \cdot \prod_s (n_s + \gamma_s + m_{si}; -m_{si})}{\prod_t (n_t + \gamma_t; m_{ti}) \cdot \prod_s (n_s + \alpha_s + m_{si}; -m_{si})} A(\vec{r})$$

$$\text{Introduisons } B(\vec{r}) = \frac{\prod (\vec{\alpha} + M\vec{r})}{\prod (\vec{\gamma} + M\vec{r})}$$

$$\begin{aligned} B(\vec{r} + \vec{I}_i) &= \prod_t \frac{\prod (\alpha_t + n_t + m_{ti})}{\prod (\gamma_t + n_t + m_{ti})} \cdot \prod_s \frac{\prod (\alpha_s + n_s + m_{si})}{\prod (\gamma_s + n_s + m_{si})} \\ &= B(\vec{r}) \cdot \frac{\prod_t (n_t + \alpha_t; m_{ti}) \cdot \prod_s (n_s + \gamma_s + m_{si}; -m_{si})}{\prod_t (n_t + \gamma_t; m_{ti}) \cdot \prod_s (n_s + \alpha_s + m_{si}; -m_{si})} \end{aligned}$$

Le quotient $\frac{A(\vec{r})}{B(\vec{r})}$ reste constant si l'on change $\vec{r}$ en $\vec{r} + \vec{I}_i$,
et nous trouvons encore, par un raisonnement analogue à celui fait
page 14, que toutes les solutions de la forme $\sum_r A(\vec{r}) u^{\vec{r}}$ du

système S_γ sont données par la formule :

$$u^{\vec{r}_0} = \frac{F_M(\vec{\alpha} + M\vec{r}_0; \vec{\gamma} + M\vec{r}_0; \vec{u})}{F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})} \quad \vec{r}_0 \in C^q$$

Le fait que m_{ji} soit > 0 ou < 0 n'intervient pas dans
l'étude de la convergence, la recherche du nombre de solutions du
système S_γ et la propriété intégrale ; nous avons donc les
mêmes résultats que précédemment .

Remarquons simplement que lorsque la matrice M_q est diagonale
le domaine de convergence ne se réduit plus à $|u_1| < 1$, si
tous les éléments de M_q ne sont pas > 0 .

V - GÉNÉRALISATION PAR L'INTRODUCTION D'UNE MATRICE M' à CÔTÉ
DE LA MATRICE M .

Introduisons à coté de la matrice M (p lignes, q colonnes)
une autre matrice M' (p' lignes, q colonnes) et généralisons
la fonction $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$ par la fonction :

$$(20) \quad F_{MM'}(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u}) = \sum_{\vec{\ell} \in Z^q} \frac{(\vec{\alpha}; M' \vec{\ell})}{(\vec{\gamma}; M \vec{\ell})} u^{\vec{\ell}}$$

$\vec{\gamma}$ étant dans C^p et $\vec{\alpha}$ dans $C^{p'}$ et la sommation
étant étendue à tous les éléments $\vec{\ell}$ de Z^q

1) - Propriété différentielle de $F_{MM'}$

Cherchons s'il est possible de généraliser le système 17 de
la page 38.

$$M = \| m_{ji} \| \quad , \quad j = 1, 2, \dots, p \quad i = 1, 2, \dots, q$$

$$M' = \| m'_{kh} \| \quad , \quad k = 1, 2, \dots, p' \quad h = 1, 2, \dots, q$$

Posons :

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^q m_{ji} u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \quad \text{et} \quad \sigma'_k = \sum_{h=1}^q m'_{kh} u_h \frac{\partial}{\partial u_h}$$

$$Y'_k = (\sigma'_k + \alpha'_k) (\sigma'_k + \alpha'_k + 1) \dots (\sigma'_k + \alpha'_k + |m'_{ki}| - 1)$$

$$Z_j = (\sigma_j + \gamma_j - 1) (\sigma_j + \gamma_j - 2) \dots (\sigma_j + \gamma_j - |m_{ji}|)$$

Les m_{ji} et m'_{kh} sont des entiers de signe quelconque, aussi
nous noterons par :

t l'indice j lorsque m_{ji} est > 0
 s l'indice j lorsque m_{ji} est < 0
 v l'indice k lorsque m'_{kh} est > 0
 w l'indice k lorsque m'_{kh} est < 0

Soit encore A le terme général de la série $F_{MM'}$, appliquons

à A l'opérateur $\prod_t Z_t \cdot \prod_w Y'_w$

$$Y'_k (u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}) = (n'_k + \alpha'_k ; |m'_{kh}|) u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}$$

n'_k k^{ème} composante de $M'\vec{\ell}$

$$Z_j (u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}) = (n_j + \gamma_j - |m_{ji}| ; |m_{ji}|) u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}$$

n_j j^{ème} composante de $M\vec{\ell}$

$$\prod_t Z_t \cdot \prod_w Y'_w (u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}) = \prod_t (n_t + \gamma_t - m_{ti} ; m_{ti}).$$

$$\prod_w (n'_w + \alpha'_w ; -m'_{wi}) \cdot u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}.$$

$$\prod_t Z_t \cdot \prod_w Y'_w (A) = \frac{\prod_v (\alpha'_v ; n'_v) \cdot \prod_w (\alpha'_w ; n'_w)}{\prod_t (\gamma_t ; n_t) \cdot \prod_s (\gamma_s ; n_s)} \cdot \prod_t (n_t + \gamma_t - m_{ti} ; m_{ti})$$

$$\cdot \prod_w (n'_w + \alpha'_w ; -m'_{wi}) \cdot u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}$$

$$\prod_t Z_t \cdot \prod_w Y'_w (A) = \frac{\prod_v (\alpha'_v ; n'_v) \cdot \prod_w (\alpha'_w ; n'_w - m'_{wi})}{\prod_t (\gamma_t ; n_t - m_{ti}) \cdot \prod_s (\gamma_s ; n_s)} \cdot u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}$$

Calculons maintenant : $\prod_s Z_s \cdot \prod_v Y'_v (A)$

$$\prod_s Z_s \cdot \prod_v Y'_v (u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}) = \prod_s (n_s + \gamma_s + m_{si} ; -m_{si}).$$

$$\prod_v (n'_v + \alpha'_v ; m'_{vi}) \cdot u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}$$

$$\prod_s Z_s \cdot \prod_v Y'_v (A) = \frac{\prod_v (\alpha'_v; n'_v + m'_{vi}) \cdot \prod_w (\alpha'_w; n'_w)}{\prod_t (\gamma_t; n_t) \cdot \prod_s (\gamma_s; n_s + m_{si})} \cdot u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}$$

Nous retrouvons ce résultat multiplié par u_i en changeant ℓ en $\ell + I_i$ dans $\prod_t Z_t \cdot \prod_w Y'_w (A)$. Comme la sommation est étendue à tous les éléments $\vec{\ell}$ de Z^q , formellement

$$\prod_t Z_t \cdot \prod_w Y'_w (F_{MM'}) = u_i \prod_s Z_s \cdot \prod_v Y'_v (F_{MM'})$$

et la série formelle $F_{MM'} (\vec{\alpha}' ; \vec{\gamma} ; \vec{u})$ est solution du système différentiel T_{γ} suisant :

$$(21) \left[\prod_t Z_t \cdot \prod_w Y'_w - u_i \prod_s Z_s \cdot \prod_v Y'_v \right] F = 0 \quad i=1,2,\dots,q$$

avec :

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^q m_{ji} u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \quad ; \quad \sigma'_k = \sum_{h=1}^q m'_{kh} u_h \frac{\partial}{\partial u_h}$$

$$Z_j = (\sigma_j + \gamma_j - 1) (\sigma_j + \gamma_j - 2) \dots (\sigma_j + \gamma_j - |m_{ji}|)$$

$$Y'_k = (\sigma'_k + \alpha'_k) (\sigma'_k + \alpha'_k + 1) \dots (\sigma'_k + \alpha'_k + |m'_{ki}|)$$

Remarquons que si les matrices M et M' sont égales, le système T_{γ} se réduit au système S_{γ} de la page 34

Nous pouvons encore nous demander si le système T_{γ} possède d'autres solutions de la forme $f = \sum_{\vec{r}} A(\vec{r}) u^{\vec{r}}$ (où les $\vec{r}$ décrivent dans C^q une classe modulo Z^q)

La condition que f est solution de T_{γ} entraîne que :

$$A(\vec{r} + \vec{I}_i) = A(\vec{r}) \cdot \frac{\prod_v (n_v' + \alpha_v'; m_{vi}') \cdot \prod_s (n_s + \gamma_s + m_{si}; -m_{si})}{\prod_t (n_t + \gamma_t; m_{ti}) \cdot \prod_w (n_w' + \alpha_w' + m_{wi}'; -m_{wi}')$$

Nous introduisons alors : $B(\vec{r}) = \frac{\Gamma(\vec{\alpha}' + M'\vec{r})}{\Gamma(\vec{\gamma} + M\vec{r})}$

$$B(\vec{r} + \vec{I}_i) = B(\vec{r}) \cdot \frac{\prod_v (\alpha_v' + n_v'; m_{vi}') \cdot \prod_s (\gamma_s + n_s + m_{si}; -m_{si})}{\prod_t (\gamma_t + n_t; m_{ti}) \cdot \prod_w (\alpha_w' + n_w' + m_{wi}'; -m_{wi}')$$

Le quotient $\frac{A(\vec{r})}{B(\vec{r})}$ reste inchangé par le changement de $\vec{r}$ en $\vec{r} + \vec{I}_i$, donc $A(\vec{r}) = B(\vec{r})$ à un facteur multiplicatif près, ce facteur étant indépendant de $\vec{r}$ et nous trouvons encore (par un raisonnement analogue à celui fait page 13), que :

Toutes les solutions du système T_γ , qui sont de la forme

$$\sum_{\vec{r}} A(\vec{r}) u^{\vec{r}}, \quad \vec{r} \text{ décrivant dans } C^q \text{ une classe modulo } Z^q$$

sont données par la formule :

$$(22) \quad u^{\vec{r}_0} F_{MM'}(\vec{\alpha}' + M'\vec{r}_0; \vec{\gamma} + M\vec{r}_0; \vec{u}) \quad \vec{r}_0 \in C^q$$

Posons $\vec{\alpha}' + M'\vec{r}_0 = \vec{\alpha}'_0$ et $\vec{\gamma} + M\vec{r}_0 = \vec{\gamma}_0$.

2) - Etude sommaire de la convergence de $F_{MM'}(\vec{\alpha}'_0; \vec{\gamma}_0; \vec{u})$

Examinons le comportement du terme général à grande distance sur C^q .

Posons comme à la page 16 $l = \delta \vec{e}$

δ distance de l'origine au point $\vec{\ell}$

$\vec{e}$ vecteur unitaire porté par $\vec{\ell}$

Si $M\vec{e}$ a pour composantes $\beta_1 \dots \beta_p$

et $M'\vec{e}$ pour composantes $\beta_1' \dots \beta_{p'}'$,

$$n_j = \delta \beta_j \quad \text{et} \quad n_k' = \delta \beta_k'$$

Appliquons la formule de Stirling au terme général A de $F_{MM'}$ ($\vec{\alpha}'_0$; $\vec{\gamma}_0$; $\vec{u}$).

Si β'_k (ou β_j) est nul, $\Gamma(\alpha'_{ok})$ (ou $\Gamma(\gamma_{oj})$) est fixé. Nous pouvons donc supposer dans la suite β_j et $\beta'_k \neq 0$,

$$\begin{aligned} \text{Log } \Gamma(\alpha'_{ok} + \delta \beta'_k) &= (\alpha'_{ok} + \delta \beta'_k + \frac{1}{2}) \text{Log } \delta \beta'_k - \delta \beta'_k \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Log } 2\pi + o\left(\frac{1}{\delta \beta'_k}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Log } \Gamma(\gamma_{oj} + \delta \beta_j) &= (\gamma_{oj} + \delta \beta_j + \frac{1}{2}) \text{Log } \delta \beta_j - \delta \beta_j + \frac{1}{2} \text{Log } 2\pi + \\ &\quad + o\left(\frac{1}{\delta \beta_j}\right), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \text{Log } \Lambda(\vec{r}) &= \left[\sum_k \alpha'_{ok} - \sum_j \gamma_{oj} + \delta \left(\sum_k \beta'_k - \sum_j \beta_j \right) + \frac{1}{2}(p'-p) \right] \text{Log } \delta \\ &\quad + \sum_k (\alpha'_{ok} + \delta \beta'_k + \frac{1}{2}) \text{Log } \beta'_k - \sum_j (\gamma_{oj} + \delta \beta_j + \frac{1}{2}) \text{Log } \beta_j \\ &\quad - \delta \left(\sum_k \beta'_k - \sum_j \beta_j \right) + \frac{1}{2} \text{Log } 2\pi(p'-p) + o\left(\frac{1}{\delta}\right). \end{aligned}$$

Par suite $\text{Log } \Lambda(\vec{r})$ est de l'ordre de :

$$\begin{aligned} &\delta \text{Log } \delta \quad \text{si} \quad \sum_k \beta'_k - \sum_j \beta_j \neq 0 \\ (23) \quad &\delta \quad \text{si} \quad \sum_k \beta'_k - \sum_j \beta_j \equiv 0 \end{aligned}$$

Remarquons que nous obtenons un résultat différent de celui obtenu

dans l'étude de la fonction F_M , car on avait alors $\text{Log } \Lambda(\vec{r}) \sim \text{Log } \delta$

$$a) \text{ Cas où } \sum_{k=1}^{p'} \beta'_k - \sum_{j=1}^p \beta_j \equiv 0$$

$$\text{On a alors : } \sum_{k=1}^{p'} n'_k \equiv \sum_{j=1}^p n_j$$

$$\sum_{k=1}^{p'} \left(\sum_{h=1}^q m'_{kh} \ell_h \right) \equiv \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^q m_{ji} \ell_i \right)$$

Cette condition est réalisée si :

$$(24) \quad \sum_{k=1}^{p'} m'_{ki} = \sum_{j=1}^p m_{ji} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, q$$

$\text{Log } A(\vec{r})$ est de l'ordre de $\left(\sum_k \beta'_k \text{Log } \beta'_k - \sum_j \beta_j \text{Log } \beta_j \right) \delta$
et $A(\vec{r}) \sim C^\delta$ C étant une constante,

$$\text{donc } A(\vec{r}) u^{\vec{r}} \sim C^\delta u^\delta = (C u)^\delta$$

Par conséquent la série $\sum_{\vec{r}} A(\vec{r}) u^{\vec{r}}$ est de même nature que la série $\sum_{\vec{r}} (C u)^{\vec{r}}$, C étant une constante.

Si aucun des γ_{0j} n'est entier, $A(\vec{r})$ n'est jamais nul ;
comme la sommation est étendue à tous les points $\vec{l}$ de Z^q , $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{l}$,
la série $\sum_{\vec{r}} (C u)^{\vec{r}}$ diverge quel que soit $\vec{u}$.

Nous aurons convergence s'il existe un nombre suffisant de γ_{0j} entiers. Le raisonnement, fait à ce sujet pour la fonction $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$, est encore valable. (voir page 18). Seul le domaine de convergence ne sera plus le même (il dépend de C).

Donc choisissons dans l'ensemble d'indices $j = 1, 2, \dots, p$ une partie P de q indices tels que les n_j correspondants soient linéairement indépendants.

$$(25) \quad F_{MM'}(\vec{\alpha}'_0; \vec{\gamma}'_0; \vec{u}) = \sum_{\vec{l} \in Z^q} \frac{\{\vec{\alpha}'_0; M\vec{l}'\}}{\{\vec{\gamma}'_0; M\vec{l}'\}} u_1^{l_1} \dots u_q^{l_q}$$

$\gamma_{0j} + n_j > 0$, pour $j \in P$

Pour $j \in P$, γ_{0j} doit être entier (> 0 et tel que

$$\gamma_{0j} + n_j > 0 \Rightarrow n_j \geq 0)$$

pour $j \notin P$, γ_{0j} peut être quelconque à l'exception des entiers ≤ 0

Il nous faut maintenant déterminer le domaine de convergence.

Notons par M_q la matrice $\|m_{ji}\|$ $i = 1, 2, \dots, q$; $j \in P$,

et posons $\vec{n}'' = M_q(\vec{l})$ $\vec{n}'' = (n_1'', \dots, n_q'')$

Les composantes de $\vec{n}''$, n_j pour $j \in P$, étant linéairement indépendantes, on peut exprimer $l_1 \dots l_q$ en fonction

des n_j'' ,

$$\vec{l} = M_q^{-1} \vec{n}''$$

Posons $M_q^{-1} = \|m_{ij}''\|$; les m_{ij}'' étant des nombres rationnels > 0 ou ≤ 0

$$l_i = m_{i1}'' n_1'' + \dots + m_{iq}'' n_q''$$

D'autre part nous avons :

$$\frac{[\vec{\alpha}'_0 ; M' \vec{l}]}{[\vec{\gamma}'_0 ; M \vec{l}]} \sim \frac{\prod_k (\beta'_k)^{n_k'}}{\prod_j (\beta_j)^{n_j}}$$

$$\left[\text{puisque } A(\vec{r}) \sim \left(\sum_k \beta'_k \text{Log } \beta'_k - \sum_j \beta_j \text{Log } \beta_j \right) \delta \right]$$

Donc :

$$F_{MM'}(\vec{\alpha}'_0 ; \vec{\gamma}'_0 ; \vec{u}) \sim \sum_{\substack{\vec{l} \in Z^q \\ n_j + \gamma_{0j} > 0 \text{ pour } j \in P}} \left[\prod_{i=1}^q \left(\frac{\prod_k (\beta'_k)^{m'_{ki}}}{\prod_j (\beta_j)^{m_{ji}}} u_i \right)^{l_i} \right]$$

Posons :

$$c_i = \frac{\prod_k (\beta'_k)^{m'_{ki}}}{\prod_j (\beta_j)^{m_{ji}}} = \frac{\prod_k (m'_{k1} e_1 + \dots + m'_{kq} e_q)^{m'_{ki}}}{\prod_j (m_{j1} e_1 + \dots + m_{jq} e_q)^{m_{ji}}}$$

Et finalement en remplaçant l_i par sa valeur en fonction des n_j''

$$F_{MM'}(\vec{\alpha}'_0; \vec{\gamma}_0; \vec{u}) \sim \sum_{\substack{\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^q \\ n_j'' > -\gamma_{0j}}} \left[\prod_{i=1}^q (c_i u_i)^{m_{i1}'' n_1'' + \dots + m_{iq}'' n_q''} \right]$$

$$\sim \sum_{\substack{\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^q \\ n_j'' > -\gamma_{0j}}} \prod_{j=1}^q \left[(c_1 u_1)^{m_{1j}''} \dots (c_q u_q)^{m_{qj}''} \right]^{n_j''}$$

Comme les n_j'' sont bornés inférieurement la série converge pour :

$$(26) \quad \left| \frac{c_1^{m_{1j}''} \dots c_q^{m_{qj}''} \cdot u_1^{m_{1j}''} \dots u_q^{m_{qj}''}}{j = 1, 2, \dots, q} \right| < 1$$

Nous pouvons encore remarquer que le nombre de solutions de la forme $\sum A(\vec{r}) u^{\vec{r}}$ du système T_γ est égal à :

$$\sum_{M_q} |\det M_q|$$

la sommation étant étendue à toutes les matrices M_q telles que les n_j correspondants soient linéairement indépendants. (La démonstration est exactement la même que celle faite pour la fonction F_M (voir page 23).

$$b) - \text{Cas où } \sum_{k=1}^{p'} m'_{ki} \text{ n'est pas égal à } \sum_{j=1}^p m_{ji}$$

pour tout i.

Log A est de l'ordre de $(\sum_{k=1}^{p'} m'_{ki} - \sum_{j=1}^p m_{ji}) \delta \text{ Log } \delta$
 et $A \sim \delta^{\sum_k n'_k - \sum_j n_j}$. Nous obtenons un résultat analogue à

celui obtenu par Monsieur DELSARTE, pour les fonctions de Bessel généralisées.

La série converge pour tout $\vec{u}$, si on limite la sommation à une partie de Z^q telle que $\sum_j n_j > \sum_k n'_k$.

Il faut donc que les termes de la série, pour lesquels $\sum_j n_j \leq \sum_k n'_k$, soient nuls.

Nous choisissons encore dans l'ensemble des indices $j=1,2,\dots,p$ une partie P de q indices tels que les n_j correspondants soient linéairement indépendants.

γ_{0j} , pour $j \in P$, doit être entier.

Alors la sommation est étendue à l'angle polyèdre convexe

$\vec{\ell} \in Z^q$, $n_j + \gamma_{0j} > 0$ pour $j \in P$ et la série

$F_{MM'}$ converge si cet angle polyèdre est tout entier dans le demi-espace défini par $\sum_j n_j > \sum_k n'_k$

Le nombre de solutions de la forme $\sum A(\vec{r}) u^{\vec{r}}$ du système T_γ est encore égal à :

$$\sum_{M_q} |\det M_q|$$

La sommation est étendue à toutes les matrices M_q , que l'on peut extraire de M, telles que les n_j correspondants soient linéairement indépendants et telles que l'angle polyèdre défini par $n_j + \gamma_{0j} > 0$, $j \in P$ soit tout entier dans le demi-espace défini par $\sum_j n_j > \sum_k n'_k$.

Remarques -

1) Dans cette brève étude sur la convergence nous avons supposé les composantes de $\vec{\alpha}'_0$ non entières. Il resterait à considérer le cas où certains α'_{0k} sont entiers, $\Gamma(\alpha'_{0k} + n'_k)$ devient alors infini pour $n'_k \leq -\alpha'_{0k}$, la série ne convergera que si les α'_{0k} vérifient des conditions particulières que nous ne déterminerons pas ici.

2) Il aurait lieu aussi de voir si nous pouvons généraliser la propriété intégrale des fonctions $F_M(\vec{\alpha}; \vec{\gamma}; \vec{u})$ en introduisant à côté du groupe G, le groupe G' correspondant à M'.

Nous allons donner simplement pour terminer quelques exemples de fonctions $F_{MM'}$.

1) - Fonction F_2 d'Appell -

$$F_2 = \sum_{n,m} \frac{(\alpha'_1; m+n) (\alpha'_2; m) (\alpha'_3; n)}{m! n! (\gamma_3; m) (\gamma_4; n)} u_1^m u_2^n.$$

Nous obtenons cette fonction en prenant pour matrices M et M'

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Formons} \quad \sum_k m'_{ki} - \sum_j m_{ji}$$

nous trouvons 0 pour $i = 1, 2$. Nous sommes dans le cas a) précédent.

$$M_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |c_1 u_1| &< 1 \\ |c_2 u_2| &< 1 \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{e_1 + e_2}{e_1}$$

$$c_2 = \frac{e_1 + e_2}{e_2}$$

$$|u_1| + |u_2| < \frac{1}{|c_1|} + \frac{1}{|c_2|} = 1$$

car m, n étant > 0 c_1 et c_2 sont > 0

Le domaine de convergence de la série est :

$$\underline{|u_1| + |u_2| < 1}$$

Propriété différentielle -

Nous appliquons les résultats de la page 42 :

$$\sigma_1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} ; \sigma_2 = u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} ; \sigma_3 = u_3 \frac{\partial}{\partial u_3}$$

$$\sigma_4 = u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}$$

$$\sigma'_1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} ; \sigma'_2 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} ;$$

$$\sigma'_3 = u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}$$

Cherchons la 1^{ère} équation $i = 1$.

$$Z_1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} ; Z_2 = 1 ; Z_3 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \gamma_3^{-1} ; Z_4 = 1$$

$$Y'_1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha'_1 ; Y'_2 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \alpha'_2 ; Y'_3 = 1$$

L'équation s'écrit :

$$\left(u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} (u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \gamma_3^{-1}) - u_1 (u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha'_1) (u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \alpha'_2) \right) F_2 = 0$$

Pour la 2^{ème} équation $i = 2$,

$$Z_1 = 1 ; \quad Z_2 = u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} ; \quad Z_3 = 1 ; \quad Z_4 = u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \gamma_4 - 1$$

$$Y'_1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha'_1 ; \quad Y'_2 = 1 ; \quad Y'_3 = u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha'_3$$

La deuxième équation est :

$$\left(u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} (u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \gamma_4 - 1) - u_2 (u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha'_1) (u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha'_3) \right) F_2 = 0$$

Les matrices M_q que l'on peut extraire de M sont :

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système possède donc $\sum_{M_q} |\det M_q| = 4$ solutions de la forme :

$$u^{\vec{r}_0}_{F_{MM}} (\vec{\alpha}' + M' \vec{r}_0 ; \vec{\gamma} + M \vec{r}_0 ; \vec{u}) .$$

$$a) \underline{M_q = M_{12}}$$

Les composantes γ_{oj} $j = 1, 2$ doivent être = à 1 . Donc :

$$1 = \gamma_1 + r_{o1} \quad r_{o1} = 0$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1 \Rightarrow$$

$$1 = \gamma_2 + r_{o2} \quad r_{o2} = 0$$

Cette solution correspond à la fonction F_2 .

$$b) \underline{M_q = M_{14}}$$

Les composantes γ_{oj} $j=1, 4$ doivent être = à 1 . Donc :

$$1 = \gamma_1 + r_{o1} \quad r_{o1} = 0$$

$$1 = \gamma_4 + r_{o2} \quad r_{o2} = 1 - \gamma_4$$

On obtient :

$$F_2' = u_2^{1-\gamma_4} \sum_{m,n \geq 0} \frac{(\alpha_1'+1-\gamma_4; m+n)(\alpha_2'; m)(\alpha_3'+1-\gamma_4; n)}{m! (2-\gamma_4; n) (\gamma_3; m) n!} u_1^m u_2^n$$

Cette série converge encore pour $|u_1| + |u_2| < 1$

c) $M_q = M_{23}$

$$\gamma_{0j} = 1 \quad \text{pour } j = 2, 3.$$

$$1 = \gamma_2 + r_{02} \quad \Rightarrow \quad r_{02} = 0$$

$$1 = \gamma_3 + r_{01} \quad \Rightarrow \quad r_{01} = 1 - \gamma_3$$

et :

$$F_2'' = u_1^{1-\gamma_3} \sum_{m,n \geq 0} \frac{(\alpha_1'+1-\gamma_3; m+n)(\alpha_2'+1-\gamma_3; m)(\alpha_3'; n)}{(2-\gamma_3; m) \cdot n! \cdot m! (\gamma_4; n)} u_1^m u_2^n$$

Cette série converge pour :

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|c_2 u_2| < 1$$

$$|c_1 u_1| < 1 \Rightarrow |u_1| + |u_2| < 1$$

d) $M_q = M_{34}$

$$\gamma_{0j} = 1 \quad \text{pour } j = 3, 4.$$

$$1 = \gamma_3 + r_{01} \quad \Rightarrow \quad r_{01} = 1 - \gamma_3$$

$$1 = \gamma_4 + r_{02} \quad \Rightarrow \quad r_{02} = 1 - \gamma_4$$

et :

$$F_2''' = u_1^{1-\gamma_3} \cdot u_2^{1-\gamma_4} \sum_{m,n \geq 0} \frac{(\alpha_1'+2-\gamma_3-\gamma_4; m+n)(\alpha_2'; m)(\alpha_3'+1-\gamma_4; n)}{(2-\gamma_3; m)(2-\gamma_4; n) m! n!} u_1^m u_2^n$$

Série qui converge pour $|u_1| + |u_2| < 1$

2) - Fonctions F_3 et F_4 d'Appell

La fonction $F_3 = \sum_{n,m} \frac{(\alpha_1'; m)(\alpha_2'; n)(\alpha_3'; m)(\alpha_4'; n)}{m! n! (\gamma_3; m+n)} u_1^m \cdot u_2^n$

correspond aux matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la fonction $F_4 = \sum_{n,m} \frac{(\alpha_1'; m+n)(\alpha_2'; m+n)}{m! n! (\gamma_3; m)(\gamma_4; n)} u_1^m u_2^n$

aux matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux fonctions F_3 et F_4 se rattachent au cas a) précédent.

3) - Nous pouvons obtenir aussi les 16 autres fonctions de la liste de Horn⁽¹⁾.

Par exemple :

la fonction $G_1 = \sum_{m,n} \frac{(\alpha_1'; m+n)(\alpha_2'; n-m)(\alpha_3'; m-n)}{m! n!} u_1^m u_2^n$

correspond aux matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ces fonctions vérifient encore les conditions a) vues dans l'étude de la convergence -

(1) - cf. - Higher Transcendental Functions- California - Institute of Technology - Volume 1 page 224 .

- BIBLIOGRAPHIE -

- J. DELSARTE - Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue, et sur une généralisation de la théorie des fonctions de Bessel et des fonctions hypergéométriques.
CBRM - Premier colloque sur les équations aux dérivées partielles -Louvain 1953
- W.N. BAILEY - Generalized hypergeometric series
Cambridge - University Press 1935
- WHITTAKER et WATSON - Modern Analysis - Chap. 14
Cambridge - University Press 1927
- California Institute of Technology :
Higher Transcendental functions - Vol. I
Mc Graw-Hill Book Company, Inc. 1953

- - : - -

VU et APPROUVE

NANCY, le : 25 septembre 1958

Le Doyen,

E. URION,

Vu et Permis d'Imprimer

NANCY, le : 27 sept. 1958

Le RECTEUR

Président du Conseil
de l'Université

G. MAYER

